BIBLIOTECA NAZ.
Vittorio Emanuele III
XXXIV
D
99
NAPOLI

Digitized by Google

Digitized by Google

INSTITUTIONES GEOMETRICAE

IN USUM ADOLESCENTIUM ADORNATAE

AUCTORE

RAYNERIO BONAVENTURA

MARTINI PISANO

IN PATRIA ACADEMIA

PUBLICO THEORETICAE MEDICINAE PROFESSORE.

NAZIONALE VITTORIO EMANUELE NAPOLI

B. R. NEAPOLIS

PISIS ANNO MDCCLXV.

IOH: PAULUS GIOVANNELLIUS CUM FILIO

Typographus Almae Piſanae Academiae

EXCUDEBAT PRAESIDIBUS ADPROBANTIBUS.

Digitized by Google

PRAEFATIO
AUCTORIS

GEometriae *nomine intelligitur ſcientia proprietatum, quae extenſioni convenire deprehenduntur, quatenus extenſio ipſa per quandam abſtractionem expenditur ut ſimpliciter extenſa, & quibusdam limitibus circumſcripta. Hanc autem extenſionem conſiderant ſaepe Geometrae prout in longitudinem tantum, vel in longitudinem ſimul, & latitudinem porrigitur, ex eaque conſideratione illud conſequitur, ut quae veritates ab iisdem de extenſione demonſtrantur, ex puris putis hypotheſibus profluxiſſe videantur. Nemo tamen a rebus geometricis inſtructior inficias iverit ex hujuſmodi hypotheſibus plurimas veritates derivari, quarum uſus tam late pateat, quam theorematum ſevere mathematicorum, cum revera eorundem ope ea omnia, quae circa extenſionem proponi poſſunt, ſatis commode enoden-*

tur, & in uſum practicum revocentur, licet ipſamet theoremata nullum habeant in natura locum. Profecto quamvis in hac rerum univerſitate nulla ſit, aut eſſe poſſit extenſio in longitudinem, nempe linea accurate recta, aut accurate curva, nec ulla extenſio in longitudinem, & latitudinem, ſcilicet ſuperficies aut perfecte plana, aut perfecte curvilinea, quales ſtatuuntur lineae, & ſuperficies Geometrarum, tamen ſi ipſaemet lineae, & ſuperficies in ſtatu quodam perfectionis conſiderentur, exinde certae quaedam veritates erui, tutoque determinari poterunt, quae deinde ad lineas & ſuperficies plus minus accurate phyſicas traducantur. Et quidem niſi propoſita quaepiam figura puta circularis accurate perfecteque deſcripta conciperetur, tot varia ſtatuenda forent theoremata ad circulum ipſum pertinentia, quot haberi poſſent figurae, quae ad perfectum circulum plus minus accedere intelligerentur, quod certe ſi quo modo praeſtari poſſet, geometrica ſtudia multis magniſque difficultatibus impediret.

Hiſce animadverſionibus patet uno veluti ictu illorum argumenta corruere, qui labem geometricis diſciplinis adſpergentes mathematica theoremata falſitatis accuſant, perinde quaſi ea ponerent, quae exiſtere nullo modo poſſunt, geome-

tri-

tricaſque veritates excipiunt tanquam hypotheſes humanae mentis bacchatione confictas, quae in nullos deinde uſus converti poſſint; quo certe nihil abſurdius fingi aut excogitari poteſt; Quamvis enim verum ſit non omnes geometriae purae meditationes in humanos uſus traduci, certum tamen eſt maximam illarum partem ad ea, quae iisdem uſibus adplicantur, vel recta ducere vel iis ſaltem aliqua ratione inhaerere. Profecto adhuc lateret Aſtronomos certa quaedam ac definita methodus determinandae Aſtrorum parallaxeos, niſi per elementarem geometriam conſtitiſſet cujuſcumque trianguli externum quemlibet angulum duobus internis oppoſitis aequalem eſſe; adhuc etiam lateret ars ignitas pilas aliquò conlineandi, niſi geometricae demonſtrationes eviciſſent parabolae ſubtangentem duplam eſſe reſpondentis abſciſſae; nec tempora accurate perfecteque metiri datum foret, niſi plane perſpecta nobis eſſet natura cycloideos: uno verbo multis adhuc praeſidiis ſalutaribus & neceſſariis careremus, atque in artibus, & ſtudiis omnibus caligaremus niſi Geometrae plurimas veritates detexiſſent, quae tamen primo ſtatim intuitu nullius utilitatis videri potuiſſent. Artes enim omnes, atque hominum ſtudia omnia e latiſſimo geometriae ſinu diffunduntur, & nihil eſſe, vel

age

agi vel excogitari poteſt, niſi geometrica facultas praeſit, vel interſit.

Quid quod ipſas hominum mentes ingenii regula, & intellectuum cote dirigit geometria, ne in veritatis inveſtigatione decipiantur, & id efficit maxime, ut accuratiſſimae diſſertationes conſiciantur, & propoſitum cohaerentibus, aptiſſimeque conſociatis inter ſe conſecutionibus conligatur. Quamvis autem geometrica diſciplina ratiocinationes ſuas dumtaxat circa triangula, quadrata, circulos, & rerum figuras pertexere videatur, una tamen ſimul opera nos, docet quomodo ceteris etiam in rebus nectendae ſint rationes, illarum momenta perpendenda, rectiſque argumentationibus propoſitum eliciendum. Dum enim Geometra ſua ſchemata ruminatur, & veri aliquid expendit, non ſolum abſolutiſſimas demonſtrationes conſtruit in geometricis, ſed ita ingenium conrigit, vim intellectionis caſtigat, mentis aciem exacuit, & ratiocinantem animam inſuefacit, inſtruit, ut ſuper quavis alia re poſſit ſine offenſione diſſerere, pro certis certa adfirmet, dubia in medio relinquat, & in utrinque veroſimilibus adſenſionem ſuſtineat, illud magna ſemper animi proviſione circumſpiciens, ne falſa pro veris, ut Ixion pro Junone nebulas com-

ple-

plectatur. Sed quando inſani homines neſcio an ex imperitia, an vero ex invidia geometriam impetunt argumentis, quae Adoleſcentes egregiam mathematicis diſciplinis operam navaturos remorari poßent, facturum me operae pretium putavi, ſi eorum hic argumenta breviter quidem, attamen momento ſuo ac pondere examinarem, ut geometrica facultas ab inuſta labe vindicetur, & alacrius etiam ad hoc ampliſſimae, preſtantiſſimaeque diſciplinae ſtudium Adoleſcentium animus incendatur.

Et primum Sextus Empyricus *hypotheſim de puncto falſam ex eo eſſe contendebat, quod punctum ipſum licet omnis prorſus expers latitudinis ſtatuatur, lineam tamen continuo fluxu gignere cenſeatur; hypotheſim autem de linea exinde conabatur evertere, quod nulla detur latitudinis expers longitudo, non in ſenſibilibus, quandoquidem quaecumque adſumatur longitudo cum aliqua ſemper ſumitur latitudine, neque in intelligibilibus, quod vix ac ne vix quidem demonſtravit. At vero quotus quiſque eſt qui non videat, planeque non ſentiat veram adhuc eſse definitionem, licet objiciatur ejuſmodi longitudinem ope ſenſus percipi non poſse? Non enim in mathematicis ad ſenſus judicium confugiendum eſt,*

ſed

ſed oportet rationis lumen conſectari, neque aliquid detrahitur hypotheſium dignitati, quamvis ipſae ſolo intellectu apprehendantur, unde conruit etiam contra punctum objectio.

Huic autem objectioni non multum abſimilis eſt illa Hobbeſii, qua ſtatuitur difficillimum ſcitu eſse, quid Euclides ceterique Geometrae intellexerint, dum punctum eſse illud definiunt cujus nulla ſit pars, ſive extenſio, quaque proinde definitio ipſa ambiguitatis arguitur, quod illa neminem doceat, an indiviſum, an vero indiviſibile punctum ipſum indicetur. Verumtamen idem plane videtur facere inluſtris hic Auctor ac ſi quis communi hominis definitioni, qua animal rationale eſt, obſcuritatem conaretur adfingere, quaereretque utrum de homine fatuo, utrum vero de divite definitio ipſa intelligenda eſse videatur. Quemadmodum enim generalis illa hominis definitio ab homine fatuo, vel divite in ſpecie abſtrahit, ita in adlata geometrici puncti definitione nihil in ſpecie deſignatur, an illud plane dividi poſſit, an vero nondum diviſum ſit.

Baylius autem hanc Euclidis, & Mathematicorum omnium hypotheſim ex eo infringere conabatur, quod a ſingulis quibuſque circularis peripheriae punctis rectae lineae duci poſſint ad cen-

centrum ; ſcilicet ſi Cl. Viri mentem adſequuti ſumus, dubitabat ille qui fieri poſset, ut ex infinitis circumferentiae punctis totidem rectae lineae ad unicum punctum, ſive circuli centrum ducerentur, quin punctum illud aliquid caperet incrementi, ſed adbuc indiviſibile perduraret. At vero hujuſmodi argumentum facile refellitur. Cum enim mathematicum punctum nihil ſit aliud quam extremum lineae, quod omni prorſus caret extenſione, illud inde conſequitur, ut quamvis infinita puncta una ſimul addantur, nulla tamen magnitudo ex illorum additione componatur, quemadmodum nullus plane numerus profluit ex additione cyphrarum licet infinitarum, quae nihilo ſive zero ſint ſingulae aequales

Nullo igitur jure clamitat Huetius *cymmerias tenebras geometriae principiis obfuſas eſse, neque in rem videtur hic loci proferre Peripateticae philoſophiae canonem, dum mathematica puncta nulla ratione intelligi, nec ſenſu proinde percepi unquam poſse arbitratur, cum omni prorſus carere magnitudine ſtatuantur ; Enimvero ineſse aliquid poteſt in intellectu, quamvis per proprias ſpecies nunquam fuerit in ſenſu, cum revera intellectus ipſe compoſitione quadam, diminutione ſimilitudine, proportione tale*

quidpiam confingere ſibi poſſit. Sic juxta mentem Ariſtotelis *Centauri imaginem nobis efformamus, quod intellectus noſter duplicem hominis, & equi imaginem ſimul componat, Gigantis, vel Pigmaei, quod idem communem hominis imaginem antea conceptam augeat, vel minuat. Res, et objecta ſpiritualia concipit, quod ille a corporeis rerum imaginibus ad incorporeas ſpiritualium rerum imagines tranſitum faciat. Quid igitur obſtabit, quominus puncti geometrici nobis ideam, vel imaginem confingamus? Et quidem depromat intellectus proprias minimarum rerum, itemque termini, vel finis, nec non corporis ipſius ſpecies, eaſque inter ſe invicem conferat, ſibique aliquid fingat, quod aliud circumſcribat, ac terminet, quodque non modo ſit longe minimum, ſed omnis etiam expers magnitudinis, profecto novam puncti ſpeciem ſibi intellectus ipſe comparabit.*

Poſtulat nunc inſtituti noſtri ratio, ut obiectionibus occurramus inluſtris Clerici, Erneſti VVolfii, & Auctoris Anonymi, *qui id ſibi negotii datum crediderunt, ut oſtenderent* Euclidem, *ceteroſque Geometras pluribus in locis non leviter aberraſse. Obiiciunt autem ſollicitos magis eſse mathematicos de certitudine, quam de evidentia, de convincendo potius intellectu, quam inlu-*

inluminando. Sed quantum a veritate deflectant, exinde conligi poterit, quod nulla detur ſaltem relate ad cognitionem noſtram certitudo ſine evidentia: Enimvero cum ratione, ac veritate conſentire judicamus Carteſii *axioma, quo ſtatuitur illud verum eſſe, quod perſpicue diſtincteque percipitur; Quinimmo de evidentia Geometras maxime laborare vel ex eo conſtat, quod ratiocinationes ſuas perſpicuis ideis ſuperſtruant. Dum igitur certitudinem tota mente conſectantur evidentiam negligere non poſſunt, ſi alios de veritate propoſitionum ſuadere velint.*

Quid? quod Erneſtus VVolſius, *&* Auctor Anonymus *longe a veritate diſſentiunt, dum omnes induſtriae nervos in eo contendunt, ut oſtendant a Mathematicis ſupervacaneam operam in iis demonſtrandis conlocari, quae probatione nullo modo videantur indigere: Enimvero ſi quid ingeniolo meo longe minimo conſequi poſſum, laudi id potius quam vitio dandum Mathematicis puto, quod nihil niſi certum ac demonſtratum proferant; immo tantum abeſt, ut iisdem vitio vertenda ſit eorum demonſtratio, quae nulla prorſus indigent probatione, ut ex ea potius demonſtratae rei natura, indoles, & origo clarius innoteſcant.*

Hanc autem objectionem, quam fortaſſe mancam, ac debilem futurum Auctores iſti deprehenderant, aliquo modo roborare conati ſunt, illud objicientes nimiam libidinem ea demonſtrandi, quae tamquam ex ſe evidentiſſima uſurpanda erant, Geometras ipſos ad ea tractanda compuliſſe, quae deinde juxta naturalem rerum ordinem reſumenda forent. At vero facilis erit hujuſce argumenti refutatio, ſi animum advertamus probationem nunquam ex ſe tractationis ordinem intervertere, cum praeſertim certum ſit eandem ad propoſitionem praecedentem demonſtrandam pertinere, neque illud requiri, ut conſequentia neceſſario cum demonſtratione copulentur, aut ex ipſa deducantur, ſed rectius conjungi conſequentia cum praecedentibus veritatibus geometrico rigore demonſtratis.

De reliquo dum nos ad Euclidem *provocant, & in ejusdem elementa ſaepius hoc vitium inrepſiſſe effutiunt, ut praepoſterum ſectetur ordine, perperam ipſos ab* Euclide *ad Geometras omnes concludere reſpondemus; Quae enim ab illo neglecta ſunt, aut non ſatis commode pertractata, ea recentiores Geometrae omni ſtudio emendarunt. Neque vero idem ipſe culpandus videtur, quod non ſatis accurate triangulum ſecundum*

dum latera & angulos diſpertiverit ; Non enim verum eſt in ejuſdem elementis hanc diviſionem deſiderari tum ratione laterum, quandoquidem triangulum ab ipſo dividitur in aequilaterum, iſoſceles, & ſcalenum, tum ratione angulorum, cum idem in rectangulum, obtuſangulum, & acutangulum diſtinguatur.

Reliquum nunc eſt ut nonnulla de ratione dicamus, qua ſuas illas punctorum, linearum, & ſuperficierum actu minime exiſtentium definitiones idem protulit Euclides. *Quem in finem illud obſervaſſe juverit hujuſmodi puncta, lineas, & ſuperficies ab eodem conſiderari non ut componentia earundem linearum, ſuperficierum, & corporum, ſed tanquam limites, ſive terminos hujuſmodi magnitudinum, ut ex ſubſequentibus definitionibus abunde conſtabit. Cum autem limites, ſive termini linearum, ſuperficierum, & corporum omni prorſus careant extenſione tum impenetrabili, tum penetrabili, iidem profecto adſignari vel determinari non poterunt, niſi ope magnitudinum minime exiſtentium. Conſtituatur enim corpus aliquod intra portionem ſpatii undique infiniti, manifeſtum eſt ibi potiſſimum corpus ipſum terminari, ubi definit reſiſtens extenſio, & immediate incipit ireſiſtens. Sed terminus*

minus extenſionis reſiſtentis, & immediatum initium inreſiſtentis eſt quid omnino indiviſibile, nihil enim inter terminum extenſionis reſiſtentis & immediatum inreſiſtentis initium intercedit, quod dici poſſit limes, vel terminus extenſionis reſiſtentis, ut patet, quare inter terminum extenſionis reſiſtentis, & initium inreſiſtentis nulla eſſe poterit extenſio vel ſolida vel penetrabilis. Quoniam vero quidquid eſt inextenſum ſecari non poteſt in partes, partiumque particulas, neceſſe ergo eſt, ut terminus dati corporis ſit omnino indiviſibilis. Sed extenſio indiviſibilis exiſtere nullo modo poteſt; quare ut Euclides *terminos corporis adſignaret; facere non potuit quin ad definitiones rerum nullo pacto exiſtentium confugeret, quarum componentia forent res minime exiſtentes, cujuſmodi ſunt puncta omni prorſus viduata magnitudine, ex qua componantur, lineae ſine ulla penitus latitudine, & altitudine, ſuperficies denique omnis prorſus expertes altitudinis.*

Nunc vero dicendum videtur, quid me praeſertim impulerit, ut geometricas hasce inſtitutiones adornarem, poſt quam innumerae propemodum diverſa methodo conſcriptae in publicum prodierunt. Animadverteram profecto pleraſque omnes

omnes vitio aliquo laborare; ſiquidem inter eos qui elementa Geometriae tradiderunt alii preſſius Euclidis *veſtigiis inhaerentes demonſtrationes ſuas prolixiori methodo concinnarunt, & quandoque etiam minus utilia proſequuti ſunt, alii vero ab ejusdem ordine recedentes non omnia quae ad elementa ſpectare poterant congeſſerunt, vel ſi qui illud ipſum praeſtare conati ſunt, plura ſcitu maxime neceſſaria nimium leviter attigerunt. Veſtigiis itaque inſiſtens immortalis* Alembertii, *qui ita tractandas eſſe cenſet geometricas inſtitutiones, ut primò linearum, ſecundo ſuperficierum, tertiò ſolidorum geometria explicetur, adjeci animum ad ea geometriae elementa conſcribenda quibus praeclariſſima quaeque geometrarum inventa, & in reliquis matheſeos partibus uſum aliquem habitura breviter quidem, ſed tamen rigide accurateque demonſtrarentur, & nitida quadam facili conſtantique ſerie ab una veritate ſenſim in aliam Tyronum mentes deducerentur.*

Quò vero ſuſcepti conſilii partes felicius adimplerem uſurpandam mihi eſſe duxi Divini Galilaei *methodum, quae* indiviſibilium *adpellatur, quaeque a ſapientiſſimis Viris* Cavallerio, Torricellio, & Angelio *mirifice exculta fuit, atque ad ſummum perfectionis apicem deducta.*

Adhi-

Adhibendam mihi praeterea exiſtimavi infinite parvorum *methodum cum utraque & aptiſſima ſit inveſtigationi, & mirandum plane in modum geometricas demonſtrationes contrahat. Et in prima quidem methodo conſiderantur ſuperficies ſive plana perinde quaſi ex lineis rectis numero infinitis coaleſcerent, & ſolida perinde ac ſi ex ſuperficiebus, ſive planis rectis multitudine pariter infinitis conſtarentur, figurae vero curvilineae tanquam ſi e perimetris curvis, & ſolida curvilinea non ſecus ac ex curvis ſuperficiebus componerentur, atque hujuſmodi componentia ab iisdem indiviſibilium nomine nuncupantur. In ſecunda vero linea e lineolis, ſuperficies ex areolis, ſolidum ex ſpatiolis ſolidis componi, & curvae ex lateribus rectis numero infinitis, & infinite parvis conſtitui intelliguntur.*

Ut autem in duabus hiſce methodis adhibendis via, ac ratione procedamus, obſervandum diligenter eſt Galilaeanam methodum ſemper habere locum, ubi areae in eodem plano conſtitutae ſecantur per easdem rectas lineas datae rectae parallelas, vel ſolida ſecantur planis eidem dato plano parallelis; ſiquidem hujuſmodi areae ſemper erunt inter ſe ut ſectiones, ſi ſe-

ctiones

ſtiones ipſae datam aliquam rationem ad ſe invicem habuerint. Habet etiam locum haec eadem methodus ubicumque ſectiones fuerint inter ſe parallelae, & aequali utrobique diſtent intervallo, ac praeterea tam in ſolidis quam in areis aequali numero contineantur.

In methodo autem infinite parvorum cavendum illud eſt, ne quid negligatur, quod non decreſcat ultra quoſcumque limites in ſe determinatos relate ad id, cujus reſpectu negligitur.

Veteres quidem Geometrae multo longiore circuitu per inſcriptiones, & circumſcriptiones aequalitatem, vel aliam etiam figurarum rationem demonſtrabant, & ejuſmodi methodum adpellabant methodum exhauſtionum. *Nitebatur autem non ſecus ac infinite parvorum methodus principio illo ac fundamento, quo ſtatuitur magnitudines quarum differentia ultra quoſcumque limites decreſcit, ſeu qualibet adſignabili differentia minor evadit pro aequalibus habendas eſſe. Ut enim ex* Euclide, *&* Archimede *conſtat tota vis demonſtrationum in eo potiſſimum nitebatur, quod niſi verae forent poſitae figurarum proprietates adſignari poſſet differentia qua figurae ipſae ab adſerta, & conſtabilita menſura deficerent, aut eandem excederent. Cum autem hu-*

§ § § *juſmo-*

Digitized by Google

juſmodi facta adſignatione per inſcriptionem, & circumſcriptionem oſtenderentur aliae figurae minus quam pro adſignata differentia a propoſitis figuris deficere aut excedere, & tamen conſtabilitam menſurae rationem ſemper obſervari, deducta ad abſurdum demonſtratione conligebant poſitam differentiam nullam eſſe utpote qualibet adſignabili minorem.

His adductus rationibus, & talibus innixus principiis has geometricas inſtitutiones ſubſecivis horis adornavi. Et quamvis certo ſcirem per me nullius plane facultatis hominem, & graviſſimis praxeos medicae curis diſtrictum fieri nullo modo poſſe ut geometrico huic operi prorſus omnis accederet abſolutio, quandoquidem ex praelaudati Alembertii *ſententia vix ipſi Geometrarum Principes* Carteſius, Nevvtonius, Leibnitius, Bernoullius *viderentur ſufficere geometricis inſtitutionibus, ut par eſt, adornandis, audendum tamen mihi eſſe duxi, ut nobiliſſimos aevi noſtri geometras ad hanc operis partem ſuſcipiendam, & felicius adimplendam commoverem.*

Ceterum ſi quis me aliqua in re deceptum humaniter oſtenderit, ingenue ſancteque profiteor id me non ſine eximia grati animi ſignificatione accepturum & maximas etiam illi gratias habiturum.

EXPLI-

Digitized by Google

EXPLICATIO SIGNORUM.

SIgnum $+$ additionem, vel aggregatum ſignificat; ſic $A + B$ exprimit aggregatum binarum magnitudinum A & B.

Signum $-$ exprimit unius magnitudinis ab alia ſubtractionem; ita $A - B$ enunciat magnitudinem B ſubductam magnitudini A.

Signum $=$ indicat aequalitatem; ſic $A = B$ exprimit magnitudinem A aequari magnitudini B.

Signum $>$ eſt nota magnitudinis altera maioris; ſignum contrario modo poſitum $<$ eſt nota magnitudinis altera minoris; Ita $A > B$ ſignificat magnitudinem A eſſe majorem magnitudine B, & $C < D$ indicat magnitudinem C minorem eſſe magnitudine D.

Signum V exprimit radicem quadratam alicujus magnitudinis; ſic VAB enunciat radicem quadratam magnitudinis expreſſae per AB.

Signum $\bowtie$ ſignificat multiplicationem; Sic $A \bowtie B$ notat magnitudinem A ductam eſſe in magnitudinem B. Pariter ſignum ( ) eandem indicat multiplicationem; Ita $(AB + CD)EF$ exprimit magnitudines AB, & CD ſimul ſumtas multiplicatas eſſe per EF.

Signum diviſionis eſt lineola inter diviſorem, & dividendum poſita; Sic $\frac{AB + CD}{E}$ indicat

Digitized by Google

dicat magnitudines AB, & CD ſimul acceptas diviſas eſſe per magnitudinem E.

Si magnitudo aliqua intelligenda ſit ad quadratum elevari, ipſi ſuffigitur paulo altius ad dexteram nota numerica 2; Sic AB^2 deſigat quadratum magnitudinis AB. Idem etiam exprimitur per AB*q*

ERRATA — CORRIGE

Pag.	Lin.	Errata	Corrige
2.		*Poſt illa verba* vel binae tantum concipi, *adde*, unde notio intelligitur ſuperficiei, vel denique tres	
7.	16.	ſi	ſit
19.	14.	+ OB OBA	+ OBA
23.	8.	DBA	BDA
31.	5.	recta	rectae
38.	20.	LEH	LEN
62.	21.	AB	Ab
78.	2.	EG, EL	EG: EL
81.	4.	= OA*q*	+ OA*q*
86.	9.	ABC, DCA	ABC: DCA
88.	17.	EA*q* − OR*q*	CR*q* − OR*q*
90.	18.	TO, VO	TV, VO
91	21.	*fig.* 62.	*fig.* 60.
ibidem	18.	CD quadrato minimae CD	CG quadrato minimae CD
93.	18.	= CD*q*	CD
195.	9.	LM	NM
ibidem	10.	LM	NM
109.	26.	KA =	KR =
127.	19.	R*aq*; AU*q*	RA*q*: AV*q*
133.	18. & 19.	loco E ponatur	K

INSTI-

INSTITUTIONES GEOMETRICAE

SECTIO I.

DE GEOMETRIA LINEARUM

CAPUT I.

DE LINEIS RECTIS QUOAD MUTUAM POSITIONEM CONSIDERATIS, NULLUM TAMEN SPATIUM CLAUDENTIBUS.

DEFINITIO I.

§. 1. Solidum, ſive *corpus geometricum* nihil eſt aliud quam portio extenſionis undique terminatae, & ad tres dimenſiones adſurgentis, ſcilicet longitudinem, latitudinem, & altitudinem, ſive profunditatem.

SCHOLION.

2. In definiendo corpore geometrico mente abſtrahimus ab omnibus proprietatibus ſenſibilibus, quibus re pſa inſtructa ſunt corpora, quorum contemplatio ad Phyſicam pertinet; qua quidem abſtractione, ut patet, corpus ſit tantum portio extenſionis in longum, latum, & profundum, pe-

netrabilis, diviſibilis, & figura aliqua terminatae. Quò vero huiuſce corporis proprietates facilius determinentur, extenſiones illae vel conſiderari ſeorſim, & quidem per abſtractionem, ſolent, unde notio longitudinis derivatur, vel binae tantum concipi, unde notio eruitur ſoliditatis. En igitur quomodo per varios abſtractionis gradus ex conſideratione corporis phyſici ad geometrici contemplationem tranſeamus, deinde ad ſuperficiei, hinc ad lineae notionem progrediamur, puncti denique notionem intelligamus. Itaque ſit.

DEFINITIO II.

3. *Superficies* eſt magnitudo in longitudinem, & latitudinem extenſa.

DEFINITIO III.

4. *Linea* eſt magnitudo extenſa tantum in longitudinem.

DEFINITIO IV.

5. Quod ſi lineae terminum concipiamus, cujus nulla ſit prorſus extenſio, terminus ille *punctum* adpellatur.

SCHOLION I.

6. Patet autem quam conſonum ſit naturae proceſſui definitiones haſce ſub ſpecie quadam analyſeos exhibere, contra vero quam ſit eidem abſurdum nulla hujuſmodi adhibita analyſi illas ipſas Adoleſcentibus geometriae operam daturis obtrudere dicendo ſuperficiem eſſe terminum ſolidi, lineam ſuperficiei, punctum lineae, ut a pleriſque Geometris methodo non ſatis philoſophica factum legimus.

SCHO-

SCHOLION II.

7. Ceterum ex definitionibus lineae, ſuperficiei, & corporis diviſio naturalis geometriae proficiſcitur, ut nempe primo linearum, ſecundo ſuperficierum, tertio corporum geometria explicetur.

DEFINITIO V.

8. *Linea recta* eſt omnium, quae duos inter terminos duci poſſunt, minima, vel ea eſt, cujus quaelibet portio eandem plagam reſpicit, eaque ut & quaelibet alia curva ponitur ex fluxu, ſeu motu puncti ſucceſſivo generari, nempe recta erit linea motu puncti deſcripta, ſi punctum ipſum directionem non mutet, curva vero, ſi idem punctum perpetuo mutet directionem.

COROLLARIA.

9. Exinde vero conſtat duas rectas lineas in uno tantum puncto concurrere; Enimvero cum omni prorſus careant latitudine, communis ipſarum interſectio in uno dumtaxat puncto fiat oportet.

10. Conſtat praeterea, quod cum lineae rectae poſitio, ex duobus pendeat punctis, ſi duo dentur puncta, data ſit tota quanta recta linea, ſcilicet aliorum punctorum omnium poſitio ſit determinata, ut proinde unica tantum recta per eadem duo puncta traduci poſſit.

11. Hinc duae rectae lineae ſpatium undique terminatum comprehendere non poſſunt; Et quidem cum neutra directionem mutare poſſit, ad aliam interſectionem tranſire non poterunt, nec proinde ſpatium circumſcribere.

SCHOLION.

12. Ceterum fatendum eſt ideam lineae ſeu rectae, ſeu curvae ita ſimplicem eſſe, ut ad ſimpliciorem, clarioremque revocari vix poſſit.

DEFINITIO VI.

13. *Superficies plana* eſt minima omnium, quae ad eaſdem rectas lineas terminantur, vel ea eſt, cui aptari undequaque poteſt linea recta.

SCHOLION.

14. Acutiſſimus *Eulerus* in introductione ad analyſim infinitorum definit lineam rectam eam eſſe, cujus terna quaeque puncta in directum ſunt poſita, ſuperficiem vero planam eſſe illam, cujus quaterna quaeque puncta in eodem ſunt plano conſtituta. At, pace dicam tanti Viri, hujuſmodi definitiones videntur petitione principii laborare; idem enim eſt dicere tria lineae puncta eſſe in directum poſita, ac lineam eſſe rectam, & quaterna quaeque puncta ſuperficiei eſſe in eodem plano conſtituta, ac ſuperficiem eſſe planam, ut proinde jure quaeri poſſit, quid ſit eſſe tria puncta in directum poſita, & quaterna quaeque puncta eſſe in eodem plano.

DEFINITIO VII.

15. *Circulus* eſt plana ſuperficies ſub una linea curva, quae *circumferentia*, vel *peripheria* dicitur, comprehenſa, cujus quodlibet punctum aeque diſtat a puncto circuli medio,

dio, quod ejusdem *centrum* nuncupatur. Quaelibet autem pars circumferentiae vocatur *arcus*; At recta, quae centrum circuli cum quolibet peripheriae puncto conjungit, *radius*, vel *ſemidiameter* adpellatur, qui radius ſi ad peripheriam uſque ad oppoſitam partem protrahatur, cum duplo maior fiat, tunc dicitur *diameter*. Spatium denique a diametro, & dimidia circumferentia comprehenſum *ſemicirculus* nuncupatur.

SCHOLION.

16. Circuli cujuſlibet circumferentiam dividunt Mathematici in 360. partes aequales, quarum quaelibet dicitur *gradus*, quemlibet vero gradum in 60. partes aequales rurſus dividunt, quae vocantur *minuta prima*, & horum quodlibet in alias 60. partes aequales, quae *minuta ſecunda* vocantur, atque ita porro. Ceterum generatur circulus ſi recta CB (*fig.* 3.) uno ſui extremo C. manente fixo circumagatur in orbem in ſuperficie plana; recta namque CB circulum, extremum illius alterum B circumferentiam deſcribet; In hac vero circuli geneſi obſervandum occurrit omnes ejusdem radios aequari inter ſe; quippe recta CB circuli generatrix in revolutione ſua omnino congruit alteri CA, vel CM, vel CN, unde omnes ſunt inter ſe aequales.

SCHOLION.

17. Obſervandum hic eſt numerum 360. adſumtum fuiſſe pro numero graduum circuli, quod idem ipſe numerus multos habeat diviſores; aequatur enim ipſi $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$, adeoque dividi poteſt per 2, per 4, per 5, per 6, per 8, per 9, per 10, aliosque numeros ut in algebra Finitorum demonſtrabimus.

SCHO-

SCHOLION.

18. Animadvertendum praeterea erit *Stevinum*, *Oughtredum*, *Wallifium* hanc ſexageſimalem gradus diviſionem reiicere, ejuſque loco Decimalem ſufficere; quod quidem breviores redderet operationes; Et quidem ſi gradus in 100. minuta prima, & minutum primum in 100. ſecunda &c. divideretur, facilius, citiuſque fractiones graduum ad minuta prima revocarentur. Ita ex. gr. ut $\frac{42}{73}$ gradus in minuta converterentur, ſatis eſſet 4200. per 73. dividere; dum in diviſione ſexageſimali 42. per 60. multiplicetur oportet, ac deinde per 72. dividatur.

DEFINITIO VIII.

19. *Angulus planus* dicitur unius lineae ad aliam inclinatio, ſcilicet eſt concurſus in eodem puncto D duarum rectarum AD, BD non in directum jacentium. Hujuſmodi punctum anguli *vertex* adpellatur, rectae vero AD, BD vocantur *latera* ejusdem anguli. (*fig.* 1.)

DEFINITIO IX.

20. Si poſito vertice F anguli EFG ſupra verticem D anguli ADB, & latere FE ſupra latus DA, latus FG congruat lateri DB, duo illi anguli vocantur aequales; ſecus vero dicuntur inaequales, & angulus ADB dicitur major angulo EFG, ſi latus FG cadat intra angulum ADB, ex gr. ſupra latus DC.

SCHO-

SCHOLION I.

21. Animadvertendum eſt autem majore, vel minore longitudine laterum angulos conſtituentium nec augeri, nec minui angulos ipſos; iidem enim non ex longitudine ſed ex inclinatione laterum menſurantur.

SCHOLION II.

22. Anguli menſura conſtituitur a Geometris arcus, quem ipſius latera comprehendunt in circumferentia circuli, qui ab ejusdem anguli vertice tanquam centro deſcribitur. Tot ergo gradus, & minuta prima, ſecunda &c. continebit angulus, quot continet arcus inter anguli latera comprehenſus. Et quidem 1. ab ipſa partium ſimilitudine, & eadem ſemper conſtantique circuli curvatura proficiſcitur, ut ejuſdem arcus ſi naturalis anguli menſura, ita ut aequales anguli, quorum vertex eſt in centro circuli aequales arcus hujuſce circuli comprehendant, quod quidem de nulla alia curva adfirmari, ac demonſtrari poteſt. 2. Duo anguli aequales comprehendunt arcus circuli eundem graduum numerum continentes, quibuſlibet radiis circuli ipſi deſcribantur. Ita omnis abeſt aequivocatio, & erroris metus in exprimendis angulis per numerum graduum, quos continet arcus circuli, qui ex anguli vertice tanquam centro, & quovis radio deſcribatur. Cum ergo dicimus duos angulos eſſe inter ſe aequales, intelligimus tantum aequales eſſe arcus, qui ex angulorum vertice, & eodem radio deſcribuntur. Cum autem dicimus angulum unum eſſe alterius duplum, triplum, &c. nihil aliud intelligimus niſi quod arcus illi angulo reſpondens ſit duplo, triplo &c. major arcu, qui huic reſpondet, quippe angulus cum ſit mera tantum inclinatio late-

rum.

rum, ſimplexque divaricatio, non autem extenſio, vel quantitas, utpote nullas habens partes, dici non poteſt duplus, triplus &c. alterius anguli, cum revera hoc ipſum de quantitate cum alia homogenea comparata tantummodo adfirmari poſſit. Quoniam vero mutua linearum poſitio ex angulorum notione proficiſcitur, hinc.

DEFINITIO X.

23. Recta linea AB (*fig.* 2.) dicitur eſſe alteri *perpendicularis* vel *normalis*, cum in ipſam incidens facit angulos, qui deinceps ſunt, nempe ABC, ABD aequales, & hujuſmodi anguli vocantur *recti*. Quod ſi recta EB inaequales angulos conſtituat cum recta CD, & angulus EBC ſit major angulo EBD, recta EB vocatur *obliqua* in rectam CD, angulus vero major EBC *obtuſus*, minor autem EBD *acutus* adpellatur.

SCHOLION I.

24. Animadvertendum hic eſt non ſolum aequales eſſe inter ſe rectos angulos, qui ſunt deinceps ad unam eandemque lineam alteri perpendicularem, ſed etiam quemlibet rectum angulum aequari alteri recto ſuper aliam rectam conſtituto. Si enim rectae CD cui normalis eſt ipſa BA ſuperponatur recta RS, cui normalis eſt recta QO, poſito puncto Q ſupra punctum B, patet normalem BA congruere ipſi QO; ſi enim recta QO caderet extra rectam BA, ex. gr. in Be, angulus RQO minor eſſet angulo CBA, & angulus OQS major angulo ABD, quare cum ſint aequales anguli CBA, & ABD, non aequarentur anguli RQO, OQS, cum ille minor ſit priore, hic vero major poſteriore, qui aequalis erat priori, neceſſe eſt igitur, ut normales QO, BA congru-

gruant inter ſe, proindeque rectus angulus CBA ſit aequalis alteri RQO, & rectus ABD ſit aequalis ipſi OQS, ſcilicet rectus recto aequalis; ponimus enim tanquam notum ipſo naturae lumine ea aequalia eſſe, quae perfectiſſime congruunt inter ſe.

SCHOLION II.

25. Quod ſi centro C (*fig.* 3.) quilibet circulus ANBM deſcribatur, ductaque diametro AB ipſi ex centro C intelligatur erecta normalis MN, recti erunt anguli ACN, NCB & recti pariter oppoſiti ACM, MCB ac proinde omnes inter ſe aequales; quare cum binae illae diametri totam circuli peripheriam in quatuor aequales partes dividant, quae proinde erunt menſurae eorundem angulorum rectorum, hinc quarta pars eiusdem peripheriae, quae 90. gradus continet, erit menſura anguli recti.

DEFINITIO II.

26. *Aequidiſtantes*, ſeu *parallelas* lineas vocamus, quae cum in eodem ſint plano eandem ſemper ad invicem diſtantiam ſervant, & quarum proinde nulla eſt inclinatio mutua; hinc in infinitum etiam productae nunquam concurrent, nec proinde angulum conſtituent.

SCHOLION.

27. Si communem Geometrarum morem ſequi foret animus, plurima hic poſtulata & axiomata eſſent adiicienda, in quibus geometriae fundamenta conſiſtere arbitrantur plerique Geometrae. At vero non abs re futurum putavi, ſi utraque hic omitterentur. Quis enim poſtulata quod atti-

Digitized by Google

net primo ſtatim intuitu non videt rectam lineam a puncto ad punctum duci, lineam rectam produci, circulum dato quolibet intervallo deſcribi poſſe? Quid autem quaeſo opus eſt axiomatis circa totum, ejuſque partem, ut portionem rectae lineae tota linea, & portionem anguli toto angulo minorem eſſe demonſtres? Praeterea quis revocare in dubium poterit, quod ſi ex. gr. duae rectae lineae aequentur uni tertiae, eae quoque aequales ſint inter ſe, quod ſi aequalibus rectis lineis addantur, vel ſubducantur aequales lineae illinc aggregata, hinc vero reſidua ſint pariter aequalia? Unum dumtaxat ex tanto axiomatum numero, quae geometricis demonſtrationibus praemitti ſolent, mihi retinendum, atque in hiſce inſtitutionibus uſurpandum principium, ſeu axioma judicavi, quo ſtatuitur ea eſſe inter ſe aequalia quae perfectiſſime congruunt, ſi ſibi mutuo ſuperponi intelligantur. Licet autem hoc uno principio cum angulorum menſura per arcus circulares conjuncto plurimae propoſitiones ad elementarem linearum geometriam pertinentes demonſtrari poſſint, ut reipſa praeſtiterunt nonnulli, qui Geometrae, & Philoſophi longe Clariſſimi *Alembertii* veſtigiis inſtiterunt, tamen cum operationes geometricae per angulorum menſuras ex arcubus circularibus deſumtas mechaniſmum quoddam redolere videantur, neque omnes linearum rectarum tum ſe invicem in circulo, tum ſe cum illius circumferentia ſecantium proprietates per duo illa tantum principia rigidiore methodo demonſtrari poſſint, aliam mihi viam tum in conſtructionibus contexendis tum in abſolvendis demonſtrationibus ineundam exiſtimavi, ut ante conſiderationem linearum rectarum reſpectu ad variam circuli poſitionem lineas rectas conſiderem, quae angulos conſtituunt, ac proinde ſpatium, vel figuram aliquam comprehendunt, quò linearum rectarum reſpectu circuli conſideratio rigidioribus demonſtrationibus ſuperſtruatur; neque enim ſatis eſt, ut qui

geo-

geometric's diſciplin's primum navant operam veritatem ejus quoquomodo percipiant, quod aut ſolvendum, aut demonſtrandum proponitur, ſed ita etiam percipiant, ut rigidioribus demonſtrationibus paulatim adſueſcant, atque adeo naturalem ratiocinandi facultatem perficiant.

PROPOSITIO I.

28. Si recta BE incidat quoquomodo in rectam CD, anguli CBE, DBE duobus rectis aequales erunt (*fig.* 2.)

Si BE ſit normalis ipſi CD, res patet. Secus intelligatur ducta BA perpendicularis ipſi CD; Et quoniam major angulus CBE rectum angulum CBA excedit angulo ABE, quo deficit minor angulus DBE a recto DBA, patet ſummam angulorum CBE, DBE aequari ſummae duorum rectorum.

COROLLARIA.

29. Hinc patet, quod dato uno angulorum, qui ſunt deinceps, alter itidem detur, eſt enim complementum prioris ad duos rectos; invenitur autem ſi datus angulus ſubtrahatur a 180. gradibus, nempe a duobus rectis, reſiduum namque erit reliquus angulus.

30. Patet etiam quod ſi plures lineae AB, EB occurrant in eodem puncto B rectae CD, erit ſumma omnium angulorum CBA, ABE, EBD ad eandem plagam rectae CD conſtitutorum aequalis duobus rectis, ſunt enim duo recti in plures partes ſecti.

31. Praeterea ſi ad idem punctum B rectae lineae AB duae rectae CB, BD non ad eandem partem poſitae faciant angulos ABC, ABD duobus rectis aequales, rectae BC, BD erunt in directum poſitae ſcilicet rectam lineam conſtituent;

Demonſtrari etiam ſic poteſt ; niſi recta BD lineam rectam conſtituat cum ipſa BC , erit alia quaevis BE in directum cum ipſa BC , erunt igitur anguli CBA , ABE duobus rectis aequales , quare anguli CBA , ABE aequabuntur angulis CBA , ABD , ablato communi CBA , patet fore angulum $ABE = ABD$, quod eſt abſurdum .

32. Si duae rectae ſe invicem ſecent in aliquo puncto , anguli circa punctum illud conſtituti ſunt quatuor rectis aequales .

33. Quod ſi in eodem puncto ſe mutuo ſecent plures lineae , anguli omnes circa punctum illud conſtituti erunt pariter aequales quatuor rectis . Sunt enim quatuor recti in plures partes ſecti .

34. Ab eodem puncto B rectae CD duae rectae perpendiculares non erigentur ad eandem partem ; ſi enim ipſae BE , BA forent ambae eidem CD perpendiculares , eſſent anguli CBE , CBA ambo recti , ac proinde aequales , quod eſt abſurdum .

PROPOSITIO II.

35. Si duae rectae CD , EK ſe invicem ſecent in puncto aliquo B , erunt anguli ad verticem oppoſiti CBE , DBK inter ſe aequales , itemque aequales anguli oppoſiti CBK , EBD .

Cum enim anguli CBE, EBD utpote aequales duobus rectis aequentur angulis EBD , DBK , qui pariter ſunt duobus rectis aequales , patet quod ſi auferatur communis EBD, ſupererit angulus CBE aequalis ipſi DBK . Eodem modo oſtenditur aequalitas angulorum CBK, EBD .

PROPOSITIO III.

36. Si duo quaevis puncta N, & H rectae NH aequaliter diſtent a duobus quibuſlibet punctis A, & B rectae AB, erit recta NH normalis ipſi AB (*fig.* 3.)

Cum enim bina puncta N, & H aeque diſtent a punctis A, & B, duo vero puncta lineae rectae poſitionem determinent, omnia ejuſdem rectae puncta aeque diſtabunt ab iisdem punctis A, & B, ac propterea aequalis erit utrinque inclinatio rectae CN ad rectam AB, unde anguli ACN, BCN aequabuntur inter ſe, & recta NC erit ipſi AB perpendicularis.

COROLLARIA.

37. Ex quolibet puncto C rectae AB duci poteſt huic perpendicularis CN, ſi reſectis in ipſa AB rectis aequalibus CE, CF, ex punctis E, & F dato quolibet intervallo deſcribantur arcus circuli ſe mutuo ſecantes in G; quippe recta CG per puncta C, & G traducta eſt quaeſita normalis, ob aequales diſtantias EG, FG, nec non CE, CF. Quod ſi punctum C fuerit extremum rectae lineae AC, haec producenda erit verſus B, & operatio inſtituenda ut ſupra.

38. Pariter ex puncto G extra lineam indefinitam AB dato duci poteſt huic perpendicularis GC. Sumantur enim ex puncto G aequales utrinque diſtantiae GE, GF, ac deinde ex punctis E, F tanquam centris eodem intervallo deſcribantur arcus circuli ſe mutuo ſecantes in puncto H, ducta GH erit datae rectae AB perpendicularis ob aequales diſtantias GE, GF, nec non HE, HF.

39. Non abſimili modo bifariam dividitur recta quaevis EF. Ex punctis enim E, & F tanquam centris, & eodem intervallo deſcribantur arcus circuli ſe mutuo ſecantes in

G, ac deinde ex iiſdem punctis alio quolibet, ſed conſtanti intervallo deſcribantur arcus ſe invicem ſecantes in H, recta GH per puncta G, & H traducta ipſam EF aequaliter dividet in puncto C; quippe puncta ſingula lineae GH aequaliter diſtant a punctis E, & F unde EC = CF. Eodem plane modo dividitur quaelibet EF, in 4, 8, 16. &c. partes aequales, ſi ſemiſſes ipſius EF, & harum ſemiſſium ſemiſſes, atque ita porro, biſariam dividantur.

PROPOSITIO IV.

40. Normalis eſt breviſſima linearum omnium rectarum quae ex dato puncto ad datam rectam duci poſſunt.

Eſto NC dicta normalis, quae producatur in M, ut ſit NC = CM, ducantur autem ex puncto N aliae rectae lineae NA, NB, erit NC < NA, vel NB. Ductis enim rectis AM, BM erit NA = AM, & NB = BM; nam cum ſit AB normalis ipſi NM, punctum C, quod eſt duabus hiſce rectis commune, non poſſet aequaliter diſtare, ut revera aequaliter diſtat, a punctis N, M, niſi alia puncta ut A, B non diſtarent aequaliter ab iiſdem punctis N, M. Eſt ergo NA = AM, & NB = BM; Atqui recta NCM minor eſt duabus rectis NAM, quare NC ſemiſſis ipſius NM minor eſt ipſa AN, quae dimidium eſt duarum NA, AM, & ſic de ceteris.

COROLLARIUM.

41. Hinc patet normalem recte adſumi pro menſura diſtantiae a dato puncto ad datam lineam, & viciſſim. Siquidem in inveniendis diſtantiis quaeritur linea omnium breviſſima, quae ex dato puncto ad datam lineam duci poſſunt.

ſunt. Atquì normalis eſt hujuſmodi linea breviſſima, ergo patet propoſitum.

PROPOSITIO V.

41. Si in rectas parallelas CE, FH incidat recta BA, erit 1. angulus BGF qui vocatur *externus* aequalis angulo BDC, qui dicitur *internus*, & oppoſitus. 2. aequales erunt anguli CDG, DGH, qui vocantur *alterni*; 3. anguli interni & ad eandem plagam conſtituti FGD, CDG aequales erunt duobus rectis. (*fig.* 4.)

Cum lineae parallelae eodem a ſe invicem ubique diſtent intervallo, notum eſt ipſo naturae lumine eandem eſſe utriuſque parallelae FH, CE inclinationem ad rectam AB, proindeque angulum BGF aequari angulo BDC. Praeterea cum angulus DGH ſit aequalis ad verticem oppoſito angulo FGB, aequabuntur inter ſe pariter anguli CDG, GDH qui ſunt alterni. Denique cum anguli BGF, DGF ſint duobus rectis aequales, duobus itidem rectis aequales erunt anguli CDG, FGD.

COROLLARIA.

43. Hinc ſi fuerit angulus BGF aequalis interno oppoſito GDC, vel ſi aequales fuerint anguli alterni CDG, DGH, vel demum ſi interni ad eandem partem poſiti anguli CDG, FGD aequentur duobus rectis, erunt rectae FH, CE inter ſe parallelae. Sit enim primo angulus BGF aequalis interno GDC, patet ipſo naturae lumine eandem eſſe rectarum CE, FH inclinationem ad rectam AB, ac proinde illas eſſe inter ſe parallelas. 2. Cum aequales ſint anguli alterni CDG, HGD, ac 3. cum ſimul aequentur duobus rectis anguli interni ad eandem partem poſiti

ſiti CDG , FGD , ſemper erit angulus externus BGF aequalis interno oppoſito GDC , ac proinde rectae CE, FH erunt inter ſe parallelae.

44. Si duae rectae CE , KM fuerint eidem rectae FH parallelae , erunt & inter ſe parallelae. Cum enim rectarum CE , KM inclinatio ad rectam AB eadem ſit ac inclinatio rectae FH ad eandem AB , eadem quoque erit utriuſque CE , KM inclinatio ad ipſam AB , unde illae ſunt inter ſe parallelae.

45. Ex dato puncto L duci poterit linea KLM ipſi FH parallela , ſi ex puncto dato L demittatur recta LO normalis ipſi FH , ac deinde ex eodem puncto L erigatur LK ipſi LO perpendicularis , quae producatur verſus M , erit namque recta KLM ipſi FH parallela ob angulos alternos aequales KLO , LOH utpote rectos.

46. Per idem punctum L eidem rectae FH parallela nonniſi unica duci poteſt. Secus enim eſſet angulus OLM = OLN, utpote uterque aequalis alterno, quod eſt abſurdum.

C A P U T II.

De lineis rectis angulos conſtituentibus ſpatiumque claudentibus, ſcilicet de proprietatibus figurarum rectilinearum.

DEFINITIO I.

47. **F***Igura plana rectilinea*, vel ſimpliciter *Figura rectilinea* eſt ſuperficies plana rectis lineis terminata.

DEFINITIO II.

48. *Triangulum* rectilineum eſt Figura tribus rectis lineis

neis terminata, quarum duae ſi rectum angulum conſtituant triangulum vocatur *rectangulum*, ſi obtuſum angulum comprehendant dicitur *obtuſangulum*, ſi vero tres rectae conſtituant angulos acutos omnes, triangulum adpellatur *acutangulum*.

DEFINITIO III.

49. *Parallelogrammum* eſt Figura quatuor lineis, vel lateribus rectis terminata, quorum oppoſita ſunt parallela; ſi praeter oppoſita latera parallela anguli omnes ſint recti, dicitur *rectangulum*; ſi praeter angulos rectos ſint latera omnia inter ſe aequalia, vocatur *quadratum*. Quod ſi ſingula latera ſint inter ſe aequalia, anguli vero non ſint recti, dicitur *rhombus*; *rhomboides* vero nuncupatur, ſi oppoſita tantummodo latera, & anguli ſe invicem adaequent. Denique *trapetium* dicitur ſpatium illud quodcumque ſit, quod quatuor lateribus comprehenditur, ſed non eſt parallelogrammum.

DEFINITIO IV.

50. *Diameter*, vel *Diagonium* cujuslibet quadrilateri dicitur recta illa, quae per oppoſitos illius angulos ducitur.

PROPOSITIO VI.

51. Ex datis tribus rectis AB, BC, CD, quarum duae quomodolibet ſumtae ſint tertia maiores triangulum BGC conſtruere (*fig.* 5.) Oportet autem ut binae quoquomodo ſumtae ſint tertia majores; nam duo latera cujuſvis trianguli quomodocumque accipiantur ſunt tertio majora, ut patet ex definitione lineae rectae;

Deſcribatur centro B radio BA circulus AGF, tum centro C radio CD circulus DGEG, patet duos hoſce circulos ſe mutuo ſecare in punctis G. Nam duo ipſorum radii ſunt majores BC, et BC + CD > BA, ſcilicet ipſa BF, ut et BC + BA > CD ſive CE. Ex puncto G ducantur rectae GB, GC, ſicque conſtruetur triangulum quaeſitum BGC. Nam eſt latus BG = BA, latus GC = CD, latus vero BC eſt latus propoſitum.

COROLLARIUM.

52. Si tres lineae propoſitae fuerint aequales, triangulum BGC habebit omnia latera aequalia, & hujuſmodi triangulum vocabitur *aequilaterum*. Si duae tantum BA, CD ſint aequales inter ſe, profluet triangulum, quod duo latera aequalia BG, GC habebit, hoc vero triangulum dicetur *iſoſcelion*, ſive *aequicrure*. Quod ſi propoſitae lineae fuerint omnes inaequales, triangulum inde emergens habebit omnia latera inaequalia, & *ſcalenum* adpellabitur.

PROPOSITIO VII.

53. In quolibet triangulo ABC producto latere AC angulus externus BCH aequatur duobus internis oppoſitis, & tres ſimul anguli ſunt duobus rectis aequales (*fig.* 6.)

Ducta namque ex puncto C recta CG ipſi AB parallela, erit angulus GCH = BAC, & ABC = BCG, quare angulus BCH = BAC + ABC. Quod ſi adponatur communis angulus ACB, erit HCB + ACB = BAC + ABC + ACB. Sed anguli HCB, ACB aequantur duobus rectis, ergo et poſteriores.

CO-

COROLLARIA.

54. Exinde conſtat in quovis triangulo duos angulos internos duobus rectis minores eſſe, & angulum externum, qui major eſt quolibet interno oppoſito, duplum eſſe alterius internorum, ſi interni ipſi fuerint inter ſe aequales,

55. Conſtat praeterea tres angulos cujuslibet trianguli rectilinei aequari tribus angulis cujuslibet alterius trianguli ſimul ſumtis; Unde ſi duo anguli alicujus trianguli aequentur duobus angulis alterius trianguli vel conjunctim, vel ſeorſim, tertius primi trianguli aequabitur tertio alterius trianguli.

56. Si triangulum fuerit rectangulum, reliqui duo erunt acuti, et ſimul ſumti uni recto aequabuntur.

57. Si fuerit angulus BAC, & a terminis B, C ducantur intra angulum ipſum rectae BO, CO ſe jungentes in puncto O, erit angulus BOC aequalis angulis internis OBA, BAC, ACO ſimul ſumtis. Nam producta BO in Z eſt angulus BOC $= OCZ + OZC$; ſed $OZC = OBA + BAZ$, ergo BOC $= OCZ + OB\ OBA + BAZ$.

58. Praeterea in qualibet figura rectilinea ABCDEF (*fig.* 7.) omnes ſimul anguli conficiunt bis tot rectos, demtis quatuor, quot ſunt latera figurae. Sumto enim quovis puncto G intra figuram, ab eoque ductis ad omnes figurae angulos rectis GA, GB, GC, GD, GE, GF, patet figuram in tot triangula reſolvi, quot ſunt ejusdem latera, et numerum angulorum rectorum hujuſmodi triangulorum duplum eſſe laterum figurae, ex quibus ſi quatuor recti auferantur, ſcilicet anguli omnes circa punctum G, reliqui anguli qui figurae angulos conſtituunt, conficient bis tot rectos demtis quatuor, quot ſunt latera figurae.

59. Productis vero lateribus omnibus cujuſlibet figurae omnes ſimul externi anguli LFE, MED, NDC, HCB, IBA,

KAF quatuor rectos conficient. Nam hujuſmodi externi anguli cum internis figurae ipſius bis tot rectos conſtituunt, quot ſunt latera figurae. Sed interni ſimul omnes cum quatuor rectis conficiunt bis tot rectos quot ſunt latera figurae; ergo externi anguli, & quatuor recti ſunt inter ſe aequales.

PROPOSITIO VIII.

60. Si quodlibet latus trianguli ABC ſit aequale reſpondenti lateri alterius trianguli *abc*, nempe BC $=$ *bc*, BA $=$ *ba*, AC $=$ *ac*, triangulum ABC erit aequale triangulo *abc*, & pariter aequales anguli aequalibus lateribus oppoſiti (*fig.* 6.)

Ex punctis *b*, *c* tanquam centris deſcribantur arcus O*a*L, I*a*N, qui ſe invicem ſecabunt in puncto *a*, et triangulum BAC ita imponatur triangulo *bac*, ut punctum B conveniat cum puncto *b*, punctum C cadet etiam in *c*, ponitur enim BC $=$ *bc*, et cum ſit BA $=$ *ba*, recta BA terminabitur in aliquo puncto arcus O*a*L. Item cum ſit CA $=$ *ca*, recta CA terminabitur in aliquo puncto arcus I*a*N. At vero rectae BA, CA ſe mutuo jungunt in puncto A, ergo utraque terminabitur in puncto, quod ſit binis arcubus commune, nempe in puncto interſectionis *a*, proindeque BA conveniet cum *ba*, CA cum *ca*, totumque triangulum BCA cum triangulo *bca*, unde erunt anguli aequalibus lateribus oppoſiti inter ſe aequales.

COROLLARIA.

61. Exinde vero oſtendi poteſt quod in triangulo aequicrure BAC anguli ad baſim ABC, ACB ſunt inter ſe aequales. Secta enim bifariam baſi in puncto R, & juncta AR erunt latera omnia trianguli ARB aequalia lateribus omni-

omnibus trianguli ARC, proindeque illius anguli ſunt hujus angulis aequales.

62. Unde conſtat angulos omnes trianguli aequilateri eſſe inter ſe aequales.

63. Oſtendi etiam poteſt, quod ſi dato angulo rectilineo MAH ſumantur portiones laterum aequales AB, AC, & ducta BC bifariam dividatur in puncto R, & jungatur AR, ſecabit haec bifariam datum angulum rectilineum MAH, ob latera trianguli ARB aequalia lateribus trianguli ARC.

SCHOLION.

64. Obſervandum hic eſt Cl. Auctorem *Euclidis* reformati ut datum angulum rectilineum bifariam ſecet, triangulum aequilaterum BOC conſtruere ad plagam dati anguli, quod quidem bene cedit tantummodo, ubi datus angulus ſit minor 60. gradibus. At ſi datus angulus 60. gradus comprehendat, triangulum aequilaterum BOC convenit cum triangulo BAC, quo quidem caſu nulla anguli diviſio haberi poteſt. Si vero major ſit 60. gradibus, triangulum BOC cadit ultra triangulum BAC; quare ut datus angulus rectilineus BAC bifariam dividatur, triangulum iſoceſion, vel aequilaterum ad plagam dato angulo oppoſitam conſtruendum eſt, nempe BVC, ac deinde ducenda eſt recta AV, quae datum angulum bifariabit.

PROPOSITIO IX.

65. Si duo triangula ABC, *abc* circa aequales angulos A, *a* habuerint latus AB = *ab*, et AC = *ac*, habebunt et baſim BC = *bc*, angulum ABC = *abc*, angulum ACB = *acb*, eritque triangulum ABC = *abc*.

Poſito namque triangulo ABC ſupra triangulum *abc*, et puncto B ſupra punctum *b*, punctum A cadet ſupra punctum

ctum *a*, ob aequalia latera AB, *ab*, ut et ob aequales angulos A, et *a* latus AC congruet lateri aequali *ac*, unde punctum C cadet ſupra punctum *c*, quare recta BC congruet ipſi *bc*, triangulum vero ABC triangulo *abc*, angulus ABC angulo *abc*, et angulus ACB angulo *acb*, eritque proinde triangulum ABC = *abc*

COROLLARIA.

66. Hinc patet quod ad extremum *a* datæ ractae *ra* conſtruetur angulus *rac* aequalis dato angulo rectilineo RAC, ſi ſumto in recta AR quovis puncto R erigatur ipſi AR normalis RC, quae ſecet alterum latus AC in quolibet puncto C, deinde ſumto in recta *ar* puncto *r* ut ſit *ar* = AR, erigatur normalis *rc* = RC, et jungatur *ac*, erit enim angulus *rac* = RAC, ob latera trianguli ARC aequalia lateribus trianguli *arc*. Idem etiam praeſtari poteſt, ſi ducta quoquomodo infra datum angulum recta RC ex tribus rectis AR, RC, CA efformetur triangulum *arc*, ut patet.

67. Ex majore pariter angulo BAC abſcindi poterit angulus minori *rac* aequalis, ſi in eodem puncto vel vertice A anguli majoris fiat angulus RAC aequalis dato *rac*

PROPOSITIO X.

68. Si duo triangula ABC, *abc* habuerint angulum ABC = *abc* et angulum ACB = *acb* latus vero BC = *bc*, erit latus BA = *ba*, AC = *ac*, et triangulum ABC = *abc*

Si enim ſuperponatur latus BC lateri *bc*, anguli ABC, ACB congruent angulis *abc*; *acb*, proindeque latera AB, AC congruent lateribus *ab*, *ac*, et punctum A cadet in *a*, angulus BAC congruet angulo *bac*, triangulum vero ABC toti triangulo *abc*.

CO-

COROLLARIA.

69. Quod ſi fuerit latus BC $=$ *bc*, angulus ABC $=$ *abc*, et angulus BAC $=$ *bac*, quoniam erit angulus ACB $=$ *acb*, ita et in hoc caſu totum triangulum ABC aequabitur toti triangulo *abc*. Eodem modo conferri poſſunt inter ſe duo latera BA, *ba* aequalibus angulis reſpondentia, unde generatim duo triangula aequantur inter ſe, ſi anguli unius ſint angulis alterius aequales, et praeterea latus unum habeant aequale alterius lateri reſpondenti.

70. Exinde vero conſtat quod ſi triangulum BAC habuerit angulos ſupra baſim B, et C inter ſe aequales, aequalia erunt et latera iisdem oppoſita AC, AB. Ducta enim ex puncto A recta AR normali in baſim BC, patet angulos trianguli ABR aequari reſpectivis angulis trianguli ACR. Eſt autem latus AR utrique triangulo commune, unde latus AB $=$ AC

71. Oſtendi etiam poteſt in quolibet parallelogrammo latera, et angulos oppoſitos aequari inter ſe, et parallelogrammum a diametro biſariari. Nam in triangulis ACD, ADB (*fig.* 8.) praeter baſim communem AD eſt angulus DBA $=$ DAC, angulus BAD $=$ CDA, unde reliquus reliquo aequalis eſt, et omnia latera, et triangula ipſa ſunt inter ſe aequalia.

72. Praeterea demonſtrari poteſt in quolibet parallelogrammo diametros ſe invicem biſariam ſecare (*fig.* 65.) Cum enim ſit AB $=$ DC, et angulus BAE $=$ DCE, angulus vero ABE $=$ CDE erit triangulum AEB aequilaterum triangulo DEC quare AE $=$ EC, et EB $=$ ED.

PROPOSITIO XI.

73. Si duo triangula inaequalia aequales habeant angulos, et angulorum unus ſupra alterum aequalem ponatur itemque reſpondentia latera, et aequalem in utroque triangulo angulum comprehendentia ſibi mutuo imponantur, erit tertium latus tertio lateri parallelum (*fig. 6.*)

Ponatur enim angulus *a* ſupra angulum aequalem A; latus *ac* ſupra reſpondens latus AH, et latus *ab* ſupra latus itidem reſpondens AM, erit latus CB, vel *cb* lateri MH parallelum. Cum enim angulus CBA ſit aequalis angulo HMA, erit recta CB rectae HM parallela. Si angulus *c* ponatur ſupra angulum aequalem H eodem planè modo demonſtratur rectam *ab* eſſe rectae AM parallelam. Idem oſtenditur de rectis *ca*, HA.

Quod ſi per quodvis punctum C in latere AH trianguli adſumtum ducatur recta CB rectae HM parallela, aequales erunt anguli AHM, ACB, & ABC, AMH.

PROPOSITIO XII.

In omni triangulo ACD major angulus ACD majori lateri AD opponitur (*fig. 9.*)

Fiat AO = AC, ductaque OC, erit angulus AOC = ACO. Sed eſt angulus AOC > ADC, quare angulus ACO major eſt angulo ADC, ac proinde angulus ACD eſt multo major eodem angulo ADC.

COROLLARIUM.

75. Hinc in omni triangulo majori angulo ACD opponitur majus latus AD. Non enim eſt latus AD = AC, tunc enim triangulum eſſet iſoſcelion, & aequales eſſent angu-

anguli ADC, ACD: Sed nec latus AD eſt $<$ AC; nam foret angulus ACD $<$ ADC, quare eſt AD $>$ AC.

PROPOSITIO XIII.

76. Si duo triangula ABC, ABD habuerint duo latera aequalia duobus lateribus, & angulus ad verticem fuerit major angulo reſpondente, erit baſis major baſi.

Poſito enim latere AB ſupra reſpondens aequale latus alterius trianguli latus BD cadet extra latus BC, eſt enim angulus ABD $>$ ABC. Igitur facto centro B, & radio BD deſcripto circulo tranſibit hic per punctum C, ob BD $=$ BC; ducta CD erit BCD triangulum iſoſcelion, quare angulus BCD $=$ BDC, ergo angulus ACD $>$ BDC, ac proinde multo major angulo ADC, unde latus AD oppoſitum majori angulo eſt majus latere AC, quod minori angulo opponitur.

COROLLARIUM.

77. Hinc iisdem poſitis ſi baſis fuerit major baſi, erit angulus major angulo. Si enim anguli ponantur aequales, aequales erunt & baſes, quod eſt contra hypotheſim. Si angulus oppoſitus minori baſi foret major, eundem angulum major baſis ſubtenderet contra hypotheſim.

D CA-

CAPUT III.

De Lineis rectis ſe invicem in circulo ſecantibus, ejuſque circumferentiae occurrentibus.

PROPOSITIO XIV.

78. Si recta AE ducta per centrum circuli bifariam ſecet in E quamlibet rectam BD non per centrum ductam, & ad circumferentiam utrinque terminatam, quae recta dicitur *chorda*, eam perpendiculariter ſecabit, & ſi ſecet perpendiculariter, eandem bifariam ſecat (*fig.* 10.)

1. Cum enim recta CE chordam DB bifariam ſecet, punctum E aequaliter diſtat ab extremis D, B. Quoniam vero recta CE per centrum tranſit, punctum C diſtat etiam aequaliter ab iisdem extremis D, B, proindeque puncta C, E aequaliter diſtant a punctis D, B, unde recta GE normalis eſt ad rectam DB.

Aliter. Ductis CD, CB, cum triangulum DEC ſit aequilaterum triangulo BEC, ut patet, erit angulus DEC = BEC, ergo ſunt ambo recti.

2. Cum recta CE ducatur a centro, punctum C aequaliter diſtat ab extremis chordae D, B. Cum autem recta CE ſit ad chordam perpendicularis, ſingula alia puncta ejuſdem rectae CE aequaliter quoque diſtant ab iisdem extremis. Hinc punctum E diſtat etiam aequaliter ab iisdem extremis D, B, unde DE = EB.

Aliter. In triangulis DEC, BEC cum ſint anguli ad E inter ſe aequales, & aequales item anguli D, & B, latus vero CE utrique triangulo commune, erit propterea latus DE = EB.

CO-

COROLLARIA.

79. Hinc ſi recta CE normalis ſit ad chordam, eamque bifariam ſecet, recta illa per centrum tranſit. Cum enim chordam ſecet bifariam, punctum E aeque diſtat ab extremis B, D. Quoniam vero eadem CE eſt chordae perpendicularis, ſingula quaeque illius puncta aequaliter etiam diſtant ab iisdem extremis B, D, unde erit centrum C punctum aliquod hujuſce perpendicularis.

80. Facile ergo erit dati circuli aut arcus cujuslibet centrum reperire. Ductis ſiquidem utcumque chordis DB, BF, ac diviſis bifariam in punctis E, O, erectiſque normalibus EA, OG punctum C, in quo ſe invicem ſecant normales illae, erit centrum circuli quaeſitum. Cum enim centrum illud reperiri debeat in utraque perpendiculari, inveniatur oportet in puncto, quod ſit utrique commune, ſcilicet in puncto interſectionis C, unde tota circumferentia deſcribi poterit.

81. Quinimmo per tria data puncta circulus deſcribi poterit, dummodo puncta illa non jaceant in eadem recta; Ductis enim duabus rectis tria data puncta jungentibus, quae erunt chordae circuli quaeſiti, ſi agantur perpendiculares, quae chordas illas aequaliter dividant, tranſibit utraque per centrum, quod proinde in communi utriuſque perpendicularis interſectione reperietur; ut hinc proinde conſtet quod ſi tria circumferentiae puncta conveniant cum tribus punctis alterius circumferentiae integrae circumferentiae ſimul congruent, & circuli erunt aequales.

82. Liquet praeterea quod ſi duo circuli idem habeant centrum, & intra ipſos ducatur quaelibet recta MN, erit MD = BN. Nam ex communi centro C ducta CE normali ad MN, erit ME = EN, & ED = EB, unde reliqua MD = BN.

 83. Duae

83. Duae rectae DB, PU ſe in circulo ſecantes, at non per centrum non ſecant ſe mutuo biſariam. Nam ex centro C ducta CE ad punctum interſectionis, patet quod ſi ſe invicem biſariam ſecarent, eſſet angulus CED rectus, itemque rectus angulus CEP, foret ergo angulus CED = CEP, quod eſt abſurdum.

PROPOSITIO XV.

84. Recta DB, quae per duo puncta in circuli perimetro accepta ducitur, intra circulum cadit.

Sumatur in recta DB quodvis punctum E, & ex centro C ducantur rectae CD, CE, CB; Et quoniam CB = CD, erit angulus CBD = CDB; ſed angulus CED major eſt angulo interno EBC, erit ergo angulus CED > CDE. In triangulo igitur CED latus CD majorem angulum CED ſubtendens eſt majus latere CE minorem angulum ſubtendente. Sed CD pertingit ad circumferentiam, ergo CE non pertinget, ac proinde punctum E cadet intra circulum. Idem oſtendetur de quolibet puncto rectae DB; Tota ergo DB cadet intra circulum.

PROPOSITIO XVI.

85. Rectarum AB, AD, AE &c. quae ab eodem puncto A vel extra circulum, vel in circuli circumferentia, vel intra circulum accepto duci poſſunt ad circumferentiam circuli cavam, maxima eſt quae per centrum tranſit, ceteris AD, AE major eſt quae terminatur ad circumferentiae punctum D propius puncto B, in quo maxima terminatur (*fig.* 11.)

Quoniam eſt DC + CA > DA, & DC + CA = BA, ergo BA > AD; quoniam vero DC + CA = EC + CA, & angulus DCA > ECA, erit baſis DA > EA.

CO-

COROLLARIA.

86. Ergo recta AA intercepta inter punctum in circuli circumferentia acceptum, & punctum intra circulum erit minima omnium, quae duci poſſunt a puncto A intra circulum ſumpto ad circumferentiam BDEAK. Nam terminatur ad punctum A in circumferentia, quod prae aliis magis diſtat a puncto B.

87. Ab eodem puncto A ad circumferentiam BDEAK duae tantum rectae lineae duci poſſunt ad duo puncta aequaliter hinc inde diſtantia a puncto B rectae AB omnium maximae. Si enim ab eodem puncto duci ad circumferentiam poſſent tres rectae aequales, duae ex iisdem forent ad unam eandemque plagam, licet ad puncta inaequaliter diſtantia a puncto B terminatae, quod eſt abſurdum.

PROPOSITIO XVII.

88. Rectarum HK, EF, DG maxima eſt diameter; ceteris ea major, quae centro propior.

Cum enim ſit $CE + CF > EF$, & $CE + CF = HK$, erit $HK > EF$. Praeterea cum ſit $CE + CF = CD + CG$, & angulus $ECF > DCG$, erit baſis $EF > DG$.

PROPOSITIO XVIII.

89. Ex puncto N in circumferentia circuli ANBM accepto rectam ducere, quae in eodem puncto circumferentiam tangat, ſcilicet utrinque producta cum nullo alio ejusdem circumferentiae puncto concurrat (*fig.* 3.)

Ex centro circuli C ducatur CN, cui normalis erigatur NK, quae erit quaeſita tangens. Nam in ipſa ſumto

quo-

Digitized by Google

quolibet alio puncto K jungatur CK. Erit ergo CK > CN ſive CO. Sed punctum O eſt in circumferentia circuli, quare punctum K erit extra circumferentiam. Item oſtendetur quodlibet aliud punctum L rectae KNL eſſe extra circumferentiam, unde recta LK eſt quaeſita tangens.

PROPOSITIO. XIX.

90. Recta CN a centro C ad contactum N rectae LK cum circulo ANBM ducta rectum angulum cum ipſa tangente conſtituit.

Si negas, ducatur CK normalis ipſi LK, erit ergo CN > CK. Sed CN = CO, quare CO > CK, quod eſt abſurdum.

COROLLARIA.

91. Hinc ſi recta LK circulum tangat, & a contactu N excitetur normalis NC eidem tangenti tranſibit per circuli centrum C. Secus enim ſi centrum foret puta in F extra CN juncta FN, angulus FNK aequaretur recto, ac proinde aequalis eſſet ipſi CNK, quod eſt abſurdum.

92. Si duo circuli ANB, XNQ eandem habeant tangentem, recta MN eidem normalis tranſibit per utriuſque centrum C, H. Ducantur enim a centris illis binae rectae CN, HN, erunt profecto rectae illae uni eidemque tangenti LK perpendiculares in puncto N; quare rectae illae unicam lineam conſtituant oportet per bina centra C, H tranſeuntem. Idem oſtenditur ſi circuli ſe extrorſum contingant.

63. Quaelibet alia recta NB a contactu ducta circulum ſecabit. Agatur enim ex centro recta CZ eidem perpendicularis. Et quoniam eſt CN > CZ, erit CO, ſive CN > CZ, quare NB cadet *infra* arcum NOB proindeque circulum ſecabit.

94. Con-

Digitized by Google

94. Contra vero circulus longiore radio per contaćtum N deſcriptus cadet extra circulum ANB. Dućta quippe recta CO, junctaque HO, quae producta ſecabit in I circulum XNQ, & in P tangentem LK, erit recta HO < HN, ſive HI, unde quodlibet punctum O circuli NOB cadet intra circulum XNQ, & circuli ipſi ſe mutuo tangunt in puncto N.

95. Itaque angulus KNO, qui dicitur *contingentiae*, recta KN, & arcu NO comprehenſus minor eſt quolibet angulo acuto rectilineo, & angulus mixtilineus CNO major quolibet acuto rectilineo.

SCHOLION.

96. Animadvertendum hic eſt in eruenda, definiendaque natura anguli contingentiae magni nominis Geometras inſudaſſe, & in varias opiniones abiiſſe. Et quidem vix, ac ne vix quidem concipi poteſt quomodo & minor ſit quolibet acuto rectilineo, & ſimul in infinitos curvilineos dividi poſſit. Hujus vero geometrici paradoxi cauſam ex eo potiſſimum repetendam cenſent *Peletarius*, & *Walliſius* quod anguli contingentiae natura diverſa plane ſit a natura anguli rectilinei, quemadmodum lineae rectae natura diverſa eſt a natura ſuperficiei; *Clavius* autem oppoſitam tuetur ſententiam. At vero fieri poteſt obſervante Cl. *Alembertio* ut quaeſtio de angulo contingentiae ad quaeſtionem de nomine revocetur, quippe quae ab idea proficiſcitur, quae voci *angulus* adnectitur: Et quidem ſi per hanc vocem intelligatur portio finita ſpatii inter curvam, ejuſque tangentem comprehenſi, dubitari non poteſt, quin hujuſmodi ſpatium comparari poſſit cum finita portione illius ſpatii, quod duabus rectis ſe invicem ſecantibus comprehenditur. Si vero eidem voci adnectatur vulgaris idea anguli, quem binae rectae conſti-

tuant,

tuant, facile deprehendetur, quod hujuſmodi idea abſolute, ac ſine modificatione accepta angulo contingentiae convenire non poteſt, quod in ipſo altera ex lineis, ex quibus conſtituitur, ſit curva. Peculiaris igitur definitio huic angulo tribuenda erit, qua ſemel recte conſtituta, nulla amplius difficultas circa eundem angulum obverſabitur. Ceterum quod hujuſmodi quaeſtio ſit tantum quaeſtio de nomine, ex eo potiſſimum patet, quod Geometrae omnes inter ſe mire conſentiant de proprietatibus omnibus, quae de angulo contingentiae demonſtrantur; ex. gr. quod inter circulum, ejuſque tangentem nulla recta linea, at infinitae lineae circulares traduci poſſint &c.

PROPOSITIO XX.

97. In eodem circulo, vel in circulis aequalibus chordae AB, GD ſi fuerint inter ſe aequales, aeque diſtabunt a centro, ſcilicet normales in easdem a centro demiſſae erunt aequales, & contra (*fig.* 12.)

1. Ductis rectis *c*G, *c*D, CA, CB, & ex centris *c*, C normalibus *co*, CO ad chordas, quoniam ponitur AB = GD, erit triangulum ACB aequilaterum, & aequiangulum triangulo G*c*D, ergo angulus BAC = DG*c*; Eſt autem CO normalis ipſi AB, ut & *co* normalis ipſi GD, quare erunt rectae AB, GD bifariam ſectae in punctis O, *o*; hinc AO = G*o*; at eſt angulus OAC = *o*G*c*; ergo baſis OC = *oc*; 2. Quod ſi hujuſmodi diſtantiae ſtatuantur aequales impoſitione facta centri *c* ſupra centrum C, & recta *co* ſupra CO, punctum *o* cadet in puncto O; & ob angulos ad *o*, & O inter ſe aequales recta GD cadet ſupra rectam AB; ſed utraque terminatur ad circumferentiam circuli, ergo punctum G cadet in puncto A, & D in B, unde tota GD congruet toti AB, eruntque proinde inter ſe aequales.

PRO-

PROPOSITIO XXI.

98. In eodem vel aequalibus circulis aequales chordae AB , GD ſubtendunt aequales arcus , & ſi arcus ſint aequales , chordae pariter ſunt aequales.

1. ſuperponatur ſegmentum GFD nempe portio circuli GFDM ſub arcu , & chorda comprehenſa ſegmento AEB ita ut chorda GD conveniat cum chorda AB illi aequali , arcus GFD congruet arcui AEB; Nam ductis chordis aequalibus AE , GF , & radiis CA , CE , & cG , cF ad illarum extrema , triangula CEA , cFG erunt inter ſe aequalia , cum aequalia habeant ſingula latera , quare punctum F cadet ſupra punctum E , & hoc ſemper continget relate ad omnia puncta aequaliter diſtantia a punctis A , G ; unde conſequitur quod arcus GFD congruet arcui AEB , ac proinde erunt inter ſe aequales. 2. Quod ſi arcus ponantur aequales quoniam arcus GFD congruet arcui AEB , ubi punctum D cadit ſupra punctum B , punctum G cadet ſupra punctum A , unde chorda GD congruet cum chorda AB , cui proinde aequalis erit.

COROLLARIA.

99. Hinc eſt quod radii ad extrema aequalium arcuum in eodem vel aequalibus circulis ducti aequales angulos comprehendunt. Si enim arcus AEB , GFD ſint aequales , chordae AB , GD ſunt itidem aequales , unde , cum triangula ACB , GcD ſingula latera habeant aequalia , aequabuntur inter ſe , & anguli ACB , GcD aequalibus chordis oppoſiti erunt aequales.

100. Radii quoque , qui in eodem vel aequalibus circulis angulos aequales comprehendunt , definiunt arcus aequales. Si enim anguli ACB , GcD fuerint aequales , tri-

angula ACB, GCD, cum aequalia habeant latera aequales angulos continentia, aequabuntur inter ſe, unde chordae AB, GD aequalibus angulis oppoſitae erunt aequales, adeoque aequales arcus quos illae ſubtendunt.

PROPOSITIO XXII.

101. Si recta CM per centrum traducta aequaliter dividat chordam ST, aequaliter quoque dividet arcum SMT (*fig.* 3.)

Enim vero cum ſingula puncta rectae CM, quae eſt ipſi ST perpendicularis, aequaliter diſtent a punctis S, T, aequalis erit puncti M diſtantia ab extremis S, T; Unde ſi ſemicirculus NTM imponatur ſemicirculo NSM, punctum T conveniet cum puncto S; Eſt autem punctum M commune, quare chordae MT, MS congruent inter ſe, nec non arcus iisdem chordis ſubtenſi, qui proinde ſunt inter ſe aequales.

Demonſtrari etiam poteſt arcuum aequalitas ex eo quod cum in triangulis SHM, THM ſit SH + HM = TH + HM, & anguli ad H recti, erit chorda SM = TM, & arcus aequalis arcui.

COROLLARIA.

102. Ducta chorda ST diametro AB parallela intercipit aequales arcus BT, AS. Cum enim ſit arcus AM = arcui BM, & TM = SM, demptis arcubus hiſce inter ſe aequalibus, remanet BT = AS; eadem ratione erit arcus OT = arcui RS.

103. Patet autem datum arcum circularem in duos aequales arcus ſecari poſſe, ſi ducta chorda datum arcum ſubtendens aequaliter per rectam perpendicularem dividatur.

Patet

Patet inſuper facile dividi poſſe quemlibet arcum in parte 2, 8, 16, 32, atque ita porro.

PROPOSITIO XXIII.

104. Angulus FCH ad centrum duplus eſt anguli FEH ad circumferentiam, cum eidem arcui inſiſtunt (*fig.* 13.)

Angulus DCH aequatur angulis DEH, CHE, qui cum ſint inter ſe aequales, erit proinde angulus DCH duplus anguli DEH. Eadem ratione angulus DCF duplus eſt anguli DEF, ergo reliquus FCH duplus eſt reliqui FEH.

COROLLARIA.

105. Igitur menſura anguli ad circumferentiam erit ſemiſſis arcus cui inſiſtit.

106. Anguli AEF, AeF eidem arcui AF inſiſtentes aequantur inter ſe, ſunt enim ambo ſemiſſis anguli ad centrum ACF.

107. Angulus AEB in ſemicirculo rectus eſt. Cum enim ſit angulus ACF duplus anguli AEF, & angulus FCB duplus anguli FEB, erunt anguli ACF, FCB = 2AEB. Sed anguli ACF, FCB aequantur duobus rectis, ergo angulus AEB in ſemicirculo uni recto aequalis eſt.

108. Unde conſtat quemlibet angulum AEH in ſegmento circuli majore acutum eſſe, angulum vero AEN in minore obtuſum.

109. Habetur praeterea ratio qua ex puncto G extra circulum dato circuli tangens duci poſſit. Iuncto namque centro C cum dato puncto, & ſupra rectam CG deſcripto ſemicirculo datum circulum ſecante in puncto H ducatur recta GH, quae erit quaeſita tangens utpote cum radio CH rectum angulum conſtituens.

 110. Hinc

110. Hinc in triangulo rectangulo ſi ſupra latus recto angulo oppoſitum, quod *hypothenuſam* vocant, tanquam diametrum deſcribatur circulus tranſibit per verticem anguli recti.

PROPOSITIO XXIV.

111. In quadrilateris circulo inſcriptis, quorum ſcilicet vertices in ejus circumferentia exiſtunt, anguli oppoſiti DAB, DEB, ut et ADE, ABE ſunt duobus rectis aequales (*fig.* 14.)

Ductis enim ex centro C rectis CA, CB, CE, CD, ductiſque AE, DB in puncto F ſe ſecantibus, erit angulus BCE duplus anguli BAE, & angulus DCE duplus anguli DAE, nec non angulus ACB duplus anguli AEB, denique angulus ACD duplus anguli AED, ergo omnes anguli circa punctum C dupli ſunt angulorum BAD, BED, ſed priores illi aequantur, quatuor rectis, ergo poſteriores ſunt duobus rectis aequales.

COROLLARIA.

112. Ergo ſi in quadrilatero duo anguli oppoſiti ſunt duobus rectis aequales, circulus per quatuor ipſius angulos traduci poterit. Si enim tranſiret per tria puncta D, A, B, & non per E, imo rectam BE ſecaret in G ducta DG, forent anguli DAB, DGB duobus rectis aequales, videlicet aequales ipſis DAE, DEB, ablato utrinque DAB foret angulus DGB = DEB, nempe internus aequalis externo, quod eſt abſurdum.

113. Exinde vero conſtat nullum parallelogrammum obliquangulum, rhombum nempe, vel rhomboidem circulo inſcribi poſſe ob inaequalitatem angulorum oppoſitorum cum duobus rectis.

PRO-

PROPOSITIO XXV.

114. Si recta LNK circulum tangat in puncto N, altera vero NS ducta a puncto contactus eundem ſecet, erit angulus LNS aequalis cuilibet angulo NTS, & angulus KNS aequalis cuilibet angulo NRS, nempe menſura anguli LNS eſt dimidius arcus NS, & anguli KNS dimidius arcus NBMS (*fig.* 3.)

Si recta NS tranſeat per centrum circuli, res patet. Secus ducatur TS tangenti parallela junctaque NT ducatur NHM quae tranſeat per centrum; quoniam ergo angulus LNH eſt rectus, rectus erit & angulus NHT; unde SH = HT, & triangulum NHT eſt aequiangulum triangulo NHS, hinc angulus NSH = NTS. Sed angulus LNS aequatur alterno NSH, ergo LNS = NTS. Et quoniam anguli in ſegmento NTS aequantur ſinguli angulo NTS, hinc horum quilibet aequabitur angulo LNS. Denique cum quilibet angulus in ſegmento NRS una cum angulo NTS aequetur duobus rectis, quibus pariter aequales ſunt anguli LNS, KNS, ſi hinc auferatur angulus LNS, illinc angulus NTS, reliquus KNS aequabitur cuilibet angulo, qui conſtitui poteſt in ſegmento NRS.

COROLLARIA.

115. Hinc ex dato circulo abſcindi poterit portio capax dati anguli, ſi ducatur ex contactu recta linea, quae cum tangente datum angulum conſtituat; ita enim ſegmentum a recta illa reſectum comprehendet angulum ab alterna parte propoſitum, & ad eandem erit ſegmentum capax alterius anguli qui cum angulo dato conficit duos rectos.

116. Si ſuper data recta NS conſtruendum foret ſegmen-

mentum circuli capax dati anguli facto angulo SNL qui datum adaequet, & ſuper NL erecta normali NM, mox ſuper NS facto angulo NSC = SNM, ex puncto C, in quo SC ſecat ipſam NM, tanquam centro intervallo CN deſcribatur circulus NSM, erit namque ſegmentum NSM ſupra datam NS conſtructum capax dati anguli SNL.

117. Si recta EM circulum tangat (*fig.* 14.) quilibet vero arcus EB minor duabus tertiis totius circumferentiae biſecetur in L, juncta BL, productaque in N poterit angulus ad N geometrice triſecari; Ducta namque EL cum ſit angulus BEL = EBL = LEH, angulus vero ELN duplus ſit anguli BEL, vel EBL, erit angulus LNM triplus anguli LEN, vel EBL; facto autem ſupra BL triangulo aequilatero LCB quoniam angulus LBC eſt tertia pars duorum rectorum, ita erit EBC = $\frac{1}{3}$ ENL, & EBL = $\frac{1}{3}$ BNM.

SCHOLION.

118. Methodum ſecandi angulum quemlibet in partes 2, 4, 8, 16, 32. ec. ſupra tradidimus. Sed per geometriam elementarem angulus in tres partes aequales ſecare nemo hactenus docuit, atque haec eſt anguli triſectio a Geometris ope circini, & regulae, ut ajunt, ſcilicet per conſtructionem circuli & lineae rectae tantopere, ſed fruſtra quaeſita. Demonſtrant enim Analyſtae problema illud ad aequationem tertii gradus adſurgere, quae per ſolum circulum conſtrui non poteſt. Ob eandem rationem angulus dividi non poteſt in partes 5, 6, 7, 9 ec. per ſola geometriae elementa, quippe hujuſmodi diviſio pro vario partium aequalium numero pertinet ad altiores gradus aequationum. *Clavius* l. 8. geom. pract. prop. 25. anguli triſe-

ctio-

ctionem perficit ope conchoideos, per hyperbolam *Pappus* l. 4. prop. 31., quod quidem & nos praeſtabimus in conicis. Si angulus triſecandus fuerit rectus ut ACB (*fig.* 15.) illius triſectio geometrica facile obtinetur ſi ſuper latere BC triangulum aequilaterum conſtruatur. Cum enim angulus BCG aequalis ſit duabus tertiis unius recti, erit angulus ACG tertia pars unius recti. In ceteris autem caſibus triſectionem anguli mechanicè expediemus hoc modo. Sit itaque trifariam ſecandus angulus rectilineus ABC. Ex puncto A demittatur AC ipſi BC perpendicularis, & ab eodem puncto A ducta AE ipſi BC parallela agatur ex puncto B recta BDE, cujus portio DE inter rectas AC, AE intercepta ſit aequalis duplae AB, quod qua ratione praeſtari poſſit ubi dictus angulus ſit ſemirectus oſtendemus in fine Cap. I. ſect. 2. quomodo vero idipſum perficiatur, ubi idem ille angulus non ſit ſemirectus oſtendemus in Algebra Finitorum. Deinde bifariam ſecetur in F recta DE, eritque punctum F centrum ſemicirculi qui deſcribitur ſupra diametrum DE, & per verticem tranſit anguli recti A. Erit igitur AF aequalis ſemiſſi ipſius DE, ſcilicet ex conſtructione ipſi AB, proindeque angulus AFB = ABF. Sed angulus AFD duplus eſt anguli AEF, ergo angulus ABF duplus eſt anguli AEF, ſcilicet alterni DBC, qui proinde eſt tertia pars dati anguli ABC.

Caramuel in ſua matheſi nova univerſalem hanc methodum adfert pro omnibus angulis, vel arcubus trifariam ſecandis: Eſto angulus DFH, ſive arcus DOH trifariam ſecandus; jungatur DH, & ex centro F ducatur recta FO tali artificio ut ſit HK = HO, erit arcus HO tertia pars totius DOH. Cum enim triangula HFO, & HKO ſint iſoſcelia, & angulum O communem habeant, erunt aequales anguli HKO, FHO, unde etiam reliqui OHK, OFH erunt aequales; quare cum angulus HFO ſit in centro, aequalis angulus

OHD

OHD inſiſtet arcui OD ; qui duplus ſit arcus OH, proindeque OH eſt tertia pars arcus DOH . Sed cum artificium illud faciendi rectas HK , HO aequales non docuerit *Caramuel*, hinc eſt ut ille nondum actum non egerit.

PROPOSITIO XXVI.

119. Angulus BAC aequalis eſt ſemiſſi anguli BHC plus dimidio anguli DHE (*fig.* 16, 17, 18)

Eſt enim angulus BAC = BDC + DBE. At angulus BDC $= \frac{1}{2}$ BHC, & DBE $= \frac{1}{2}$ DHE, ergo angulus BAC $= \frac{1}{2}$ BHC + $\frac{1}{2}$ DHE.

PROPOSITIO XXVII.

120. Angulus BAC aequalis eſt ſemiſſi anguli BHC minus dimidio anguli DHE (*fig.* 19, 20, 21)

Eſt quippe angulus BEC = BAC + DBE. At eſt angulus BEC $= \frac{1}{2}$ BHC, & DBE $= \frac{1}{2}$ DHE, ergo $\frac{1}{2}$ BHC = BAC + $\frac{1}{2}$ DHE, proindeque angulus BAC $= \frac{1}{2}$ BHC $- \frac{1}{2}$ DHE.

PROPOSITIO XXVIII.

121. Ex ſecante AB, & tangente AC angulus BAC aequalis eſt ſemiſſi anguli BHC minus dimidio anguli DHC (*fig.* 22, 23, 24.)

Nam eſt angulus BDC = BAC + ACD; ſed eſt ACD = DBC, quare BDC = BAC + DBC; hinc BAC = BDC − DBC

$- DBC$. At $BOC = \frac{1}{2} BHC$, & $DBC = \frac{1}{2} DHC$, ergo $BAC = \frac{1}{2} BHC - \frac{1}{2} DHC$.

PROPOSITIO XXIX.

122. Ex tangentibus OC, OA angulus COA aequalis eſt ſemiſſi anguli CVT plus dimidio anguli TVA minus dimidio anguli CVA (*fig.* 51.)

Eſt enim angulus $COT = \frac{1}{2} CVT - \frac{1}{2} CVI$, & $TOA = \frac{1}{2} TVA - \frac{1}{2} AVI$ quare angulus $COA = COT + TOA = \frac{1}{2} CVT + \frac{1}{2} TVA - \frac{1}{2} CVI - \frac{1}{2} AVI$. At eſt $\frac{1}{2} CVI + \frac{1}{2} AVI = \frac{1}{2} CVA$, ergo $COA = \frac{1}{2} CVT + \frac{1}{2} TVA - \frac{1}{2} CVA$.

COROLLARIUM.

123. Si ſecans OT tranſeat per circuli centrum, & producatur AV in Z, erit angulus $COA = CVZ$. Nam anguli triangulorum CVO, AVO aequantur quatuor rectis, & anguli OCV, OAV ſunt duobus rectis aequales, ergo COA, & CVA aequantur duobus rectis. Sed CVZ, & CVA aequantur itidem duobus rectis, ergo angulus COA aequalis eſt angulo CVZ.

Digitized by Google

PROPOSITIO XXX.

124. In quolibet triangulo AFB ductis ex A & B in oppoſita latera FB, FA normalibus AE, BH convenientibus in G, juncta FG, & producta uſque ad baſim in C, erit FC eidem baſi perpendicularis (*fig.* 15.)

Enimvero ob rectos angulos AEB, BHA, ſuper diametro AB deſcripto circulo AHEB per haec puncta tranſeunte, & ob angulos rectos FHG, FEG deſcripto ſuper diametro FG circulo ad eadem puncta E, H conveniente, junctaque EH erit in circulo FHGE angulus EFG = EHG, & in ſemicirculo AHEB angulus EHG, vel EHB = EAB ſive GAC, erit ergo angulus EFG = GAC, & angulus FGE = AGC, ergo reliquus angulus FEG = ACG, at ille rectus eſt, ergo & hic eſt rectus, & per conſequens FC eſt rectae AB perpendicularis.

CAPUT IV.

De Proportionibus geometricis linearum rectarum.

DEFINITIO I.

125. Ratio dicitur habitudo vel relatio illa, quam inter ſe habent duae quaevis propoſitae magnitudines relate ad quantitatem; ſcilicet eſt modus ille, quo magnitudo magnitudinem continet, vel hujus partes, ſive etiam eſt relatio duarum magnitudinum ejusdem generis juxta certum numerum partium aequalium, in quas magni-

gnitudo antecedens, quae nempe refertur ad aliam, vel ad ipſam habet relationem, reſolvitur, & quarum magnitudo conſequens ad quam ſcilicet antecedens relationem habet, certum quendam numerum continet: ex. gr. ſuntò duae magnitudines ejusdem generis A, & B, & reſolvatur antecedens A in partes aequales, quarum quaelibet dicatur x, earumque numerus ponatur $= m$, patet magnitudinem conſequentem B certum numerum n earundem partium continere, ita ut exiſtente $A = mx$, ſit $B = nx$. Stat igitur relationem antecedentis A ad conſequentem B ſecundum continentiam aequalium partium in utraque magnitudine certis numeris, quicumque illi fuerint, definitam nuncupari rationem. Quo vero haec rationis idea, vel definitio extendi poſſit ad magnitudines *incommenſurabiles*, quas ſcilicet nulla metitur menſura communis, ſatis eſt ponere incommenſurabiles numeros m, & n, vel ponere variabilem x ultra quoſcumque limites decreſcentem; hoc ſiquidem caſu reſiduum incommenſurationis erit comparative nullum, ut conſtat.

COROLLARIUM.

126. Patet autem quod ratio quaelibet ſemper debeat intercedere inter magnitudines ejusdem generis ex. gr. inter ſonum & ſonum, tempus & tempus, motum, & motum ec. quae proinde magnitudines adpellantur *homogeneae*. Hinc adpoſite *Euclides* definit magnitudines homogeneas eſſe illas, quae ſi augeantur, vel multiplicentur ſe ſe invicem ſuperare poſſunt.

DEFINITIO II.

127: Si ratio duas inter magnitudines intercedens, ſit eadem, aequalis, vel ſimilis rationi inter duas alias magni-

tudines intercedenti, nempe ſi prima magnitudo ſecundam vel ejus partes reſpiciat contineatve eodem plane modo, quo tertia reſpicit, vel continet quartam, ejusdemve partes ſimiles, quae ſcilicet aeque vel aequali mòdo continentur in ſuis totis, hujuſmodi rationum identitas ſimilitudo, vel aequalitas dicitur *proportio*; ſcilicet proportio eſt aequalitas rationum in eo conſiſtens, quod reſolutis magnitudinibus antecedentibus in eundem partium aequalium numerum, magnitudines conſequentes aequalium rationum eundem dictarum partium numerum contineant. Ex. gr. ratio ipſius A ad B dicitur aequalis rationi ipſius C ad D, quod reſolutis antecedentibus A, & C in eundem numerum m partium aequalium, quarum quaelibet magnitudinem A conſtituens dicatur x, quaelibet vero magnitudinem C componens vocetur y, utraque magnitudo conſequens B, & D eundem numerum n dictarum partium contineat, ita ut exiſtente $A = mx$, $B = nx$, $C = my$, ſit etiam $D = ny$.

DEFINITIO III.

128. Magnitudines inter quas intercedit proportio dicuntur *proportionales*, & *homologae* vocantur prima, & tertia, ſcilicet antecedentes, nec non ſecunda, & quarta nempe conſequentes.

SCHOLION.

129. Hic animadvertiſſe juverit *Euclidem*, alioſque Geometras bene multos, ut explicent in quo potiſſimum ſita ſit proportio confugere ad aeque multiplicia, quae ſcilicet ſuas partes aeque vel aequali modo continent; contendunt nempe Geometrae illi tunc quatuor magnitudines eandem inter ſe rationem habere, cum ſecundum quamlibet multiplica-

plicationem auctis antecedentibus magnitudinibus, auctiſque itidem ſecundum quamlibet aliam, at eandem multiplicationem conſequentibus illud contingit, ut ſi multiplex primae magnitudinis ſit majus multiplici ſecundae, & multiplex tertiae ſit majus multiplici quartae; ſi multiplex primae ſit aequale multiplici ſecundae, ſit & multiplex tertiae aequale multiplici quartae; ſi denique multiplex primae ſit minus multiplici ſecundae ſit pariter multiplex tertiae minus multiplici quartae. At vero praeterquamquod hujuſmodi doctrina longior eſt & implexior, haberi nullo modo poteſt ut prima proportionum proprietas, ſed ab ipſarum rationum ſimilitudine profluit, ut proinde conſultius videatur expoſitae ſuperius definitioni proportionis inhaerere.

DEFINITIO IV.

130. Proportio dicitur *continua* cum conſequens magnitudo primae rationis eſt antecedens ſecundae. Vocatur autem *diſtincta* cum magnitudines antecedentes diverſae ſunt

COROLLARIUM.

131. In continua igitur proportione magnitudines omnes eſſe debent homogeneae, in diſtincta eſſe poſſunt heterogeneae, ſeu diverſi generis, modo binae ſint homogeneae.

SCHOLION,

132. Conſulto diſtinctam adpellavi poſteriorem proportionem non vero *diſcretam* ut eam vocant Geometrae, ut hujuſmodi definitione magnitudines continuas potiſſimum complecterer, quae ſunt objectum geometriae, vox enim diſcreta pertinet ad numeros.

DEFINITIO V.

133. Ratio *inverſa*, ſeu *reciproca* ea eſt quam habet magnitudo conſequens ad ſuam antecedentem. Ita ratio inverſa ipſius 2 ad 4 eſt ratio dupla, illa nempe quam habet 4 ad 2.

DEFINITIO VI.

134. Si fuerint tres quaelibet magnitudines A, B, C ratio extremarum, ſcilicet A ad C dicitur compoſita ex rationibus intermediis, ſive ex rationibus A ad B, & B ad C: Et quidem cum ratio A ad B incipiat ab A, & in B terminetur, ratio autem B ad C incipiat a B, & terminetur in C, patet hujuſmodi continuas rationes adſumi poſſe tamquam partes integram rationem A ad C conſtituentes, ut proinde ratio A ad C componatur ex rationibus intermediis A ad B, & B ad C; Quod quidem de qualibet ſerie magnitudinum vel creſcente, vel decreſcente intelligendum eſt.

COROLLARIUM.

135. Hinc propoſitis quatuor magnitudinibus A, B, C, D, quarum prima A ad ſecundam B (*fig.* 16.) quamlibet habeat rationem, tertia vero C ad quartam D quamlibet aliam habeat rationem, facile erit hujuſmodi rationes componere, ſi nempe adſumatur quaelibet magnitudo E, ac deinde talis magnitudo G inveniatur, ut inter E, & G magnitudine F interpoſita ratio primae E ad F ſimilis, vel aequalis deprehendatur rationi A ad B, ratio vero ipſius F ad G ſimilis inveniatur rationi ipſius C ad D, ratio quippe

pe ipſius E ad G compoſita erit ex rationibus ipſius A ad B, & C ad D.

SCHOLION.

136. Hic non abs re erit animadvertere *Euclidem* ejusque interpretes ſtatuere rationem ex pluribus componi, cum rationum denominatores in ſe invicem ducti rationem aliquam exhibent; ſcilicet cum factum ex denominatoribus duarum rationum aequatur denominatori rationis, quae dicitur compoſita. Ita ex. gr. denominator rationis 4. ad 2. cum ſit 2, invenitur enim denominator dividendo magnitudinem antecedentem per conſequentem, denominator vero rationis 9. ad 3. cum ſit 3, ſi ducatur 2. in 3, habebitur 6. qui juxta noſtram methodum compoſitionis rationum denominator eſt rationis ipſius E ad G. Alii vero rationem ex pluribus compoſitam eam eſſe contendunt, quam habet productum antecedentium magnitudinum ad productum conſequentium. Et quidem ſi 4. ducatur in 9, & 2. in 3, habebitur ratio 36. ad 6. nempe denominator rationis E ad G. Verum ſi quid recte judico hujuſmodi definitiones vim non habent definitionis, quin potius exiſtimem easdem duas eſſe compoſitarum rationum affectiones, ac duo proinde theoremata, quae licet veriſſima ſint, demonſtratione tamen videantur indigere.

DEFINITIO VII.

137. Ratio ex duabus rationibus aequalibus compoſita dicitur *duplicata*; ita ratio ipſius AA ad BB eſt duplicata rationis A ad B, quae dicitur illius *ſubduplicata*, vel *dimidiata*. Ratio ipſius AAA ad BBB eſt *triplicata* rationis ipſius A ad B, & haec illius *ſubtriplicata*, atque ita porro. Hinc ſi datae fuerint tres magnitudines continue proportiona-

tionales ratio primae ad tertiam erit duplicata rationis primae ad ſecundam, ſi magnitudines continue proportionales fuerint quatuor, ratio primae ad quartam dicetur triplicata rationis primae ad ſecundam, & ſic deinceps. Ratio praeterea quam habet quadratum alicujus magnitudinis ad quadratum alterius dicetur duplicata ejus quam inter ſe habent eaedem magnitudines; ratio cuborum erit triplicata &c. Contra vero ratio, quam inter ſe habent radices quadratae dicetur ſubduplicata, ratio radicum cubicarum vocabitur ſubtriplicata rationis reſpondentium poteſtatum.

SCHOLION.

138. Animadvertendum eſt autem rationem duplicatam non eſſe unam eandemque cum ratione dupla, triplicatam cum tripla &c. quippe in rationibus duplis, triplis &c. non inſtituitur comparatio inter rationes, ſed inter terminos ejusdem rationis, quorum ſi antecedens bis contineat conſequentem, ratio dicitur *dupla*, ſi ter *tripla* &c. ſcilicet ratio duplicata componitur ex duobus rationibus aequalibus, dupla vero ratio ea eſt cujus terminus antecedens duplus eſt conſequentis.

HYPOTHESIS.

139. Ratio quam habet magnitudo aliqua ad aliam puta A ad B brevitatis gratia ſic exprimitur A : B, proportio vero ſic effertur A : B = C : D.

PROPOSITIO XXXI.

140. Si magnitudines A, & B fuerint aequales, & detur alia quaevis Z, erit A : Z = B : Z. Et Z : A = Z : B.
Hanc

Hanc propoſitionem, ut & ſequentes quatuor mera eſſe axiomata cum *Tacqueto* contendimus, quae proinde nullo modo demonſtrari debeant.

SCHOLION.

141. Eodem modo aequales ad aequales magnitudines eandem habent rationem, nempe ſi detur etiam alia magnitudo $X = Z$, erit $A : X = B : Z$, & viceverſa. Sic etiam patebit veritas trium ſequentium propoſitionum, ſi loco unicae magnitudinis Z ubique ponantur duae aequales X, & Z.

PROPOSITIO XXXII.

142. Si magnitudines A, & B fuerint inaequales, major A ad tertiam Z majorem habebit rationem quam minor B habeat ad eandem Z. Item minor B minorem habet rationem ad Z quam habet major A ad Z. Et Z ad majorem A minorem habebit rationem, quam eadem Z habeat ad B quae minor eſt quam A. Et Z ad minorem B majorem habebit rationem quam habet eadem Z ad A quae major eſt.

PROPOSITIO XXXIII.

143. Si A, & B ad Z eandem habeant rationem; aequales ſunt A, & B. Et ſi eadem Z ad A & B eandem habeat rationem, ipſae A & B erunt aequales.

PROPOSITIO XXXIV.

144. Si A ad Z majorem rationem habeat quam B ad Z, erit A major quam B; Et proinde ſi B minorem habeat rationem ad Z quam habet A ad Z, B minor erit quam A.

Quod ſi Z ad B majorem rationem habeat quam eadem Z ad A, erit B minor quam A. Et ſi Z ad A minorem rationem habeat, quam eadem Z habet ad B, erit A major quam B.

PROPOSITIO XXXV.

145. Rationes, quae eidem rationi ſunt aequales, eaedem, ſimiles, ſunt aequales, eaedem, ſimiles inter ſe.

PROPOSITIO XXXVI.

146. Si quotvis magnitudines fuerint proportionales, ſcilicet $A : B = C : D$, erit *colligendo* ut una antecedentium ad unam conſequentium, ita omnes ſimul antecedentes ad omnes ſimul conſequentes, nempe $A : B = A + C : B + D$.

Cum enim ſit $A : B = C : D$, toties quaelibet pars ſubmultiplex, ea nempe, quae accurate continetur in majore, adeoque aliquoties ſumta majorem accurate metitur, toties, inquam, quaelibet pars ſubmultiplex ipſius B continebitur in A, quoties eadem pars ſubmultiplex ipſius D continetur in C, quare duae ſimiles partes ſubmultiplices ipſarum B, & D ſimul ſumtae toties continentur in duabus magnitudinibus A, & C ſimul acceptis, quoties pars ſubmultiplex ipſius B continetur in A. Magnitudines igitur A, & C eandem habent ad duas magnitudines B, & D rationem, quam habet ipſarum altera A ad ſuam conſequentem B.

SCOLION.

147. Ex hoc theoremate veluti ex uberrimo fonte *indiviſibilium geometria* profluxit.

PRO-

PROPOSITIO XXXVII.

148. Partes ſimiles eandem inter ſe rationem habent quam earundem magnitudines multiplices, eae ſcilicet quas magnitudo minor aliquoties ſumpta accurate menſurat (*fig.* 27.)

Intelligantur enim ipſae *a*A, gC diviſae in ſuas partes *ab*, *bc*, *cd* &c. gf, *fe* &c. ita ut quaelibet pars ipſius *a*A ſit = B, quaelibet vero pars ipſius gC ſit = D, erit ergo *ab* : *gf* = B : D, itemque *bc* : *fe* = B : D & ſic de ceteris, erunt igitur omnes antecedentes *a*A ad omnes conſequentes gC = B : D.

PROPOSITIO XXXVIII.

149. Si fuerit A : B = C : D, erit *permutando* A : C = B : D.

Cum enim ſit A : B = C : D pars ſubmultiplex ipſius B toties continetur in A, quoties pars ſimilis ſubmultiplex ipſius D continetur in C. Erit ergo A : C ut pars ſubmultiplex ipſius B ad ſimilem partem ſubmultiplicem ipſius D. Idem dicas de duabus, tribus &c. partibus ſubmultiplicibus ipſarum B, & D, ſcilicet de ipſis magnitudinibus B, & D; quare erit A : C = B : D.

COROLLARIUM.

150. Unde conſtat quod ſi prima fuerit major ſecunda, erit & tertia major quarta, & ſi aequalis, aequalis, ſi minor, minor.

PROPOSITIO XXXIX.

151. Si fuerit A : B = C : D , erit *invertendo* B : A = D : C.

Quod patet ; & quidem evidens eſt ipſo rationis lumine, quod ſi fuerit A : B = C : D , eſſe debet B : A = D : C.

PROPOSITIO XL.

152. Si fuerit AB : BC = DE : EF , erit *componendo* AC : BC = DF : EF. (*fig.* 28.)

Cum enim ſit AB : BC = DE : EF , erit permutando AB : DE = BC : EF , quare duo antecedentia AC ſunt ad duo conſequentia DF ut BC : EF , & permutando AC : BC = DF : EF.

PROPOSITIO XLI.

153. Si fuerit AC : BC = DF : EF , erit *dividendo* AB : BC = DE : EF.

Niſi enim ſit AB : BC = DE : EF , fiat ut DE : EF ita GB : BC , erit itaque componendo GC : BC = DF : EF = AC : BC , quare cum ipſae GC , AC eandem habeant ad BC rationem , erunt inter ſe aequales , quod eſt abſurdum.

PROPOSITIO XLII.

154. Si fuerit AC : BC = DF : EF , erit *per converſionem rationis* AC : AB = DF : DE.

Erit namque dividendo AB : BC = DE : EF , & inver-

vertendo CB : BA = FE : ED, & componendo AC : AB = DF : DE.

PROPOSITIO XLIII.

155. Si fuerit A : B = C : D, & B : E = D : F, erit *ex aeque ordinate* A : E = C : F. (*fig.* 29.)

Cum enim ſit A : B = C : D, erit permutando A : C = B : D; & quoniam B : E = D : F, ergo rurſus permutando B : D = E : F. Sed ut B : D = A : C, ergo A : C = E : F, & permutando A : E = C : F.

Hoc ex eo etiam confirmatur quod rationes A : E, & C : F ex iisdem rationibus componantur.

PROPOSITIO XLIV.

156. Si fuerit A : B = D : F, & B : E = C : D; erit *ex aeque perturbate* A : E = C : F.

Fiat ut B : E, vel C : D ita F : G, erit permutando C : F = D : G. Sed eſt A : B = D : G = C : F, ergo patet propoſitum.

Id ulterius ex eo probatur, quod rationes A : E, & C : F ex iisdem rationibus componantur.

PROPOSITIO XLV.

157. Si rationes AB : CD, & E : F fuerint reciprocae hoc eſt ſi fuerit AB : CD = F : E, vel CD : AB = E : F, quae ex iiſdem componitur ratio erit aequalitatis (*fig.* 30.)

Fiat enim ut AB : CD = F : G. Eſt ratio E : G compoſita ex rationibus E : F, & F : G, vel AB : CD. Quoniam vero eſt AB : CD = F : E, & AB : CD = F : G, erit F : E = F : G, unde E = G, ac proinde ratio E : G compoſita ex duabus reciprocis AB : CD, & E : F eſt ratio aequalitatis.

PRO-

PROPOSITIO XLVI.

158. Viciſſim ſi ratio compoſita $E : G$ fuerit aequalitatis, rationes componentes $AB : CD$, & $E : F$ erunt reciprocae.

Cum enim ſit $E = G$, erit $F : E = F : G$ nempe ut $AB : CD$, ac proinde rationes componentes ſunt reciprocae.

PROPOSITIO XLVII.

159. Si ut totum AC eſt ad totum DF, ita ablatum BC ſit ad ablatum EF, etiam ut totum eſt ad totum, ita reliquum AB erit ad reliquum DE (*fig.* 32.)

Quoniam eſt $AC : DF = BC : EF$, erit permutando $AC : CB = DF : FE$, ergo per converſionem rationis $AC : AB = DF : DE$, & permutando $AC : DF = AB : DE$.

PROPOSITIO XLVIII.

160. Si fuerit $AC : DF = X : Z$, maxima AC, & minima Z duabus reliquis DF, X majores erunt.

Ex maxima AC ſumatur $AB = X$, & ex DF reſecetur $DE = Z$. Erit ergo AC tota ad totam DF ut ablata AB ad ablatam DE, ergo reliqua BC eſt ad reliquam EF ut tota AC ad totam DF. Sed eſt $AC > DF$, ergo & $BC > EF$; quoniam vero eſt $AB = X$, & $DE = Z$, etiam $AB + Z = X + DE$; quare ſi ad $AB + Z$ addatur majus BC & ad $X + DE$ addatur minus EF, erit totum $ABC + Z > X + DEF$.

PROPOSITIO XLIX.

161. Si major ſit ratio $A : B$ quam $C : D$, invertendo minor erit ratio $B : A$ quam $D : C$ (*fig.* 31.)

Habeat enim $A : H$ eandem rationem quam $C : D$, ergo major erit ratio $A : B$ quam $A : H$, eritque propterea $B <$

H, unde

Digitized by Google

H, unde B: A minorem habebit rationem quam H : A. Sed H : A = D : C, ergo B : A minorem rationem habet quam D : C.

PROPOSITIO L.

162. Si A : B majorem rationem habeat quam C : D, etiam permutando major erit ratio A : C quam B : D.

Eſto enim A : H = C : D, ergo major erit ratio A : B quam A : H, unde B < H, & ideo B : D minorem rationem habet quam H : D. Sed A : C = H : D, quare cum ratio H : D ſit major ratione B : D, etiam A : C erit in majore ratione quam B : D.

PROPOSITIO LI.

163. Si AB : BC majorem rationem habeat quam DE : EF etiam componendo AC : BC majorem rationem habebit quam DF : FE (*fig.* 31.)

Habeat enim GB : BC eandem rationem quam DE : EF, componendo GBC : BC erit in eadem ratione ac DF : FE. Sed AC : CB majorem habet rationem quam GBC : BC, quippe eſt AB > GB, cum illa ad BC majorem habeat rationem quam GB : BC, ideoque etiam ABC major eſt quam GBC; ergo AC : CB eſt in majore ratione quam DF : FE.

PROPOSITIO LII.

164. Si major fuerit ratio AC : CB quam DF : FE, dividendo major erit ratio AB : BC quam DE : EF.

Fiat enim ut DF : FE ita GC : CB, ergo major erit ratio AC : CB quam GC : CB, erit ergo GC < AC, ablato communi BC, erit GB < AB, ideoque major erit ratio AB :

BC quam

BC quam GB : BC. Sed haec ratio eadem eſt cum ratione DE : CF, ergo AB : BC eſt in majore ratione quam DE : EF.

PROPOSITIO LIII.

165. Iisdem poſitis erit per converſionem rationis minor ratio AC : AB quam DF : DE.

Nam facta DC : CB = DF : FE, erit per converſionem rationis CG : GB = FD : DE. Sed quoniam eſt GB < AB, ut in praeced. demonſtravimus, minor eſt ratio CB : AB quam CB : BG, & componendo minor erit ratio CA : AB quam CG : GB, ergo etiam minor eſt ratio CA : AB quam FD : DE.

PROPOSITIO LIV.

166. Si in duabus ſeriebus A, B, C; D, E, F major ſit ratio A : B quam D : E itemque major B : C quam E : F, etiam ex aequo ordinate major erit ratio A : C quam D : F (*fig.* 33.)

Eſto enim ut D : E ita G : B & ut E : F ita B : H erit ex aequo ordinate D : F = G : H. Sed quia major eſt ratio A : B, quam D : E, vel G : B, erit A > G. Et quoniam ratio B : C major eſt quam E : F, ſive B : H, erit C < H, unde A major quam G habebit ad C minorem ipſa H rationem majorem quam G : H, creſcit enim ratio tum ratione majoris antecedentis, tum ratione minoris conſequentis. Sed G : H = D : F ; major igitur eſt ratio A : C quam D : F.

PROPOSITIO LV.

167. Si ratio A : B major ſit ratione E : F, & ratio B : C major ratione D : E, erit ex aequo perturbate ratio A : C major quam D : F.

Fiat enim G : B = E : F. & B : H = D : E, erit ex aequo perturbate G : H = D : F. Sed cum ſit major ratio

A : B

A : B quam E : F, vel G : B, eſt A $>$ G, & cum ſit B : C in majore ratione quam D : E, vel B : H eſt C $<$ H, ergo erit major ratio A : C quam G : H, ſive D : F.

PROPOSITIO LVI.

168. Si major ſit ratio A : D quam B : E, & haec rurſus major quam C : F, erit ratio omnium antecedentium A + B + C ad omnes conſequentes D + E + F major quam ultimae antecedentis ad ultimam conſequentem.

Quoniam enim major eſt ratio A : D quam B : E, permutando major erit ratio A : B quam D : E, componendo major erit ratio A + B : B, quam D + E : E. Rurſus permutando major eſt ratio B : C quam E : F, ergo ex aequo major eſt ratio A + B : C quam D + E : F, & componendo major eſt ratio A + B + C : C quam D + E + F : F.

CAPUT V.

De Proportionibus Arithmeticis linearum rectarum.

DEFINITIO I.

169. Ratio dicitur *arithmetica*, cum unice expenditur differentia, quae inter duas propoſitas magnitudines intercedit, adeoque proportio arithmetica in duabus rationibus arithmeticis inter ſe aequalibus conſiſtit, cum nempe differentia primae, & ſecundae magnitudinis aequatur differentiae, quae tertiam inter & quartam intercedit.

Digitized by Google

DEFINITIO II.

170. Si magnitudines antecedentes arithmeticarum rationum diverſae fuerint, proportio dicitur *diſtincta*. Si vero antecedens ſecundae eadem fuerit cum conſequente primae rationis, proportio dicitur *continua*.

PROPOSITIO LVII.

171. Si magnitudines AB, CD, EF, GH fuerint in proportione arithmetica nempe $AB : CD \because EF : GH$, ſic enim exprimimus proportionem arithmeticam, erit aggregatum primae & ultimae aequale aggregato ſecundae, & tertiae, ſcilicet $AB + GH = CD + EF$ (*fig.* 34.)

Abſcindatur ex AB portio $KB = CD$, & ex EF portio $LF = GH$ erit ergo $AK = EL$, unde $KB + GH = CD + LF$, ac proinde $KB + GH + AK$, nempe $AB + GH = CD + LF + EL$, nempe $CD + EF$.

COROLLARIA.

172. Unde conſtat quod ſi proportio fuerit continua, aggregatum primae, & ultimae erit aequale duplo mediae.

173. Hinc ſi duabus datis magnitudinibus ipſarum ſumma dividatur bifariam, exſurget media proportionalis arithmetica inter duas magnitudines.

174. Quod ſi ſumma extremarum ſit aequalis ſummae mediarum, erunt magnitudines illae proportionales arithmetice, ſcilicet cum ſit $AB + GH = EF + CD$, ſi utrinque auferantur CD & GH erit $AB + GH - CD - GH = EF + CD - CD - GH$, nempe $AB - CD = EF - GH$, ſive $AK = EL$, ergo eadem eſt differentia magnitudinum AB, CD; & EF, GH, unde conſtat propoſitum.

175. Similiter ſi ſumma extremarum AB + EF, ſit aequalis duplo mediae CD (*fig.* 35.) ablatis utrinque CD, & EF, fiet AB + EF − CD − EF = 2 CD − CD − EF, hoc eſt AB − CD = CD − EF ſive AO = CK adeoque eadem ſingularum differentia, ſive ipſae tres arithmetice proportionales.

176. Magnitudines AB, CD, & EF, GH (*fig.* 34.) arithmetice proportionales permutando ſunt etiam arithmetice proportionales. Cum enim ſit AB : CD ∵ EF : GH, erit AB + GH = CD + EF. At vero ſi ponatur AB : EF ∵ CD : GH eſt AB + GH = EF + CD, ergo conſtat propoſitum. Eodem fere modo oſtenditur magnitudines eſſe proportionales arithmetice tum invertendo, tum ex aequo ordinate, tum ex aequo perturbate. Praeterea varie combinando fieri poſſunt plurima aggregata, aut reſidua arithmetice proportionalia, ut ex dictis colligi poteſt.

PROPOSITIO LVIII.

177. Si fuerint tres magnitudines AB, CD, EF in continua arithmetica proportione, ratio maximae AB ad mediam CD minor erit ratione ejusdem mediae ad minimam EF (*fig.* 36.)

Eſto AG differentia primae a media aequalis ipſi CH differentiae ejuſdem mediae a tertia EF, & fiat ut AB : CD ita CD ad aliam quae ſumi poterit in ipſa CD, cum hac minor eſſe debeat, & ſit DK. Cum ſit ergo AB : CD, vel GB ut CD : KD, erit dividendo AG : GB = CK : KD, & permutando AG : CK = GB : KD. Sed eſt GB, vel CD > KD, ergo erit & AG > CK, proindeque CH > CK, quare punctum K cadit inter C, & H, adeoque tota KD eſt > HD, ſive EF; ratio igitur CD : DK eſt minor ratione CD : DH vel EF. Sed ratio CD : DK eſt eadem

 cum

cum ratione AB : CD ; ergo ratio AB : CD eſt minor ratione CD : EF.

CAPUT VI.

De Proportionibus harmonicis, & contrharmonicis linearum rectarum.

DEFINITIO I.

178. Recta AB ſecari dicitur *harmonice*, vel in *proportione harmonica* in punctis C, D, cum tota AB eſt ad extremam BD ut altera extrema AC ad mediam CD (*fig.* 37.)

COROLLARIUM.

179. Erit ergo permutando tota AB ad extremam AC ut altera extrema BD ad mediam CD.

DEFINITIO II.

180. *Media harmonica* dicitur recta CB compoſita ex media CD, & extrema BD, tota vero AB & ipſa extrema BD vocantur *extremae harmonicae*.

COROLLARIA.

181. Ergo & ipſa DA media eſt harmonica inter AB & AC.

182. Unde colligitur quod ex tribus AB, CB, DB, vel

vel AB, AD, AC prima ad tertiam eſt ut differentia primae a media ad differentiam mediae ab eadem tertia. Nam eſt AB : DB = AC : CD, & AB : AC = DB : CD.

DEFINITIO III.

183. *Lineae harmonicales* vocantur illae, quae profluunt ex quatuor punctis A, C, D, B, in quibus quaelibet recta AB harmonice ſecatur, & in idem punctum F concurrunt, ut AF, CF, DF, BF, vel etiam illae quae ab iiſdem quatuor punctis profluentes ſunt inter ſe parallelae, cujuſmodi ſunt rectae AE, CE, DE, BE (*fig.* 38.)

DEFINITIO IV.

184. Recta AB ſecari dicitur *contrharmonice*, vel in *proportione contrharmonica* in punctis C, D, cum tota AB eſt ad extremam BD ut pars media CD ad alteram extremam AC (*fig.* 39.)

COROLLARIUM.

185. Erit ergo permutando tota AB ad mediam CD, ut extrema BD ad alteram extremam AC.

PROPOSITIO LIX.

186. Si recta AB ſecta fuerit harmonice in quatuor punctis A, C, D, B, & in ipſa loco ex. gr. puncti C aliud punctum E adſumatur, non ſecabitur harmonice in hoc puncto & in aliis A, D, B (*fig.* 40.)

Poſito enim quod ſit AE : ED = AB : BD, quoniam eſt AB : BD = AC : CD, eſſet AE : ED = AC : CD, & componen-

ponendo $AD : ED = AD : CD$, foret igitur $ED = CD$, quod eſt abſurdum.

PROPOSITIO LX.

287. Eadem recta AB dividi non poteſt vel produci in *b* ita ut retentis punctis C, D, poſſit AB harmonice ſecari in punctis D, C.

Cum enim ſit $AB : BD = AC : CD$, ſi foret $AC : CD = Ab : bD$, eſſet $AB : BD = Ab : bD$, adeoque eſſet $AB + bD > BD + Ab$, ſcilicet $AB + bB + BD > BD + AB + bB$; ſed aequantur hae magnitudines inter ſe, ergo patet propoſitum. Vel ſumto puncto *b* ad alteram plagam puncti B eſſet $AD + bD + bB + bD > AD + bD + bB + bD$, quod eſt abſurdum.

CAPUT VII.

De Proportionibus linearum angulos conſtituentium.

PROPOSITIO LXI.

288. In triangulis aequiangulis latera aequalibus angulis oppoſita ſunt proportionalia. Huiuſmodi triangula vocantur *ſimilia* (*fig.* 41.)

Eſto AD ſemiſſis rectae AB, & ducatur DE ipſi BC parallela, nec non EF parallela ipſi AB, erit $EF = AD = DB$. Sed eſt triangulum CEF aequale triangulo EAD, quare $CE = EA$, & $CF = ED = FB$; unde AE, vel EC eſt ſemiſſis lateris AC, ut AD ſemiſſis eſt lateris AB, itemque CF, vel FB, eſt

ſemiſ-

ſemiſſis lateris CB. Si recta AD (*fig.* 42.) ponatur tertia, quarta, vel quaelibet alia pars rectae AB, eadem ratione oſtenditur rectas AF, FD eſſe tertiam, quartam &c. partem laterum AC, CB, quippe ſimili facta conſtructione triangula AFD, FHL, HCK ſunt inter ſe aequalia, ut patet. Idem conſtat ſi recta AD non contineatur accurate in recta AB, ſed cum fractione aliqua; oſtendetur enim ſimili prorſus modo AF in latere AC, & FD in latere CB contineri; Quod ſi ponamus in triangulis ACB, HCK rectas AB, HK eſſe inter ſe incommenſurabiles, diviſa primum concipiatur recta HK in partes 1000, patet in recta AB certum partium numerum cum aliquo reſiduo contineri. Intelligatur iterum eadem recta HK in partes 10000. diviſa, recta AB certum earundem partium numerum continebit, ſed cum reſiduo, quod minus erit priore, atque ita porro ſemper minus fiet reſiduum, quo plures in partes ſecta concipietur recta HK. Unde ſi in particulas numero infinitas ſecari intelligatur, patet reſiduum incommenſurationis fieri comparative nullum; quare generatim triangula quaelibet aequiangula latera aequalibus angulis oppoſita habent proportionalia.

Hinc ſi ponatur CA $= a$, AB $= b$, CE $= x$, EF $= y$, erit $a : b = x : y$, ac propterea $ay = bx$, quae eſt aequatio conſtitutiva trianguli (*fig.* 41.)

SCHOLION.

189. Nomine *aequationis* intelligimus comparationem duarum ſub diverſa expreſſione aequalium magnitudinum, nomine vero aequationis *conſtitutivae* intelligimus aequationem, quae figurae alicujus, nempe trianguli, circuli, parabolae, ellipſeos &c. naturam vel eſſentiam exprimit, intelligendo ſemper ut ſenſus ſit ſecundum hypotheſim, & doctrinae methodum pro ut ab illo, vel ab alio auctore traditur, nempe pro ut hoc,

vel

vel illud primo concipimus in re, & ex illo ceteras rei proprietates recte demonſtramus.

COROLLARIA.

190. Ex praecedente propoſitione manifeſte conligitur quod ſi a vertice trianguli ABC nempe ex puncto C ducantur plures rectae CD, CE, quae ſecentur recta FG baſi parallela in punctis O, N, ſecabuntur in hiſce punctis proportione ad latera, & ſegmenta FO, ON, NG erunt proportionalia portionibus baſeos AD, DE, EB. Cum enim ſit AD: FO = DC: CO = DE: ON = EC: CN = EB: NG, erit permutando FO: ON = AD: DE, & ON: NG = DE: EB.

191. Hinc ſi ſecanda fuerit recta CB in eadem ratione, qua recta alia CA ſecta eſt in punctis H, F, ducta AB agantur ipſi parallelae HK, FG quae ſecabunt rectam CB in eadem ratione, qua ſecta eſt recta CA.

192. Unde patet modus quo data recta, ex. gr. CA in quotvis aequales partes dividi poſſit, quod fiet, ſi ducta indefinita CM ipſique juncta ad quemlibet angulum recta CA ſumantur in ea quotlibet aequales partes CK, KG, GB &c. ac deinde juncta AB ducantur per puncta K, G &c. ipſi BA parallelae.

193. Inveniri etiam poterit tertia proportionalis duabus rectis CF, FA ſi ducta a puncto C ad quemlibet angulum indefinita CM abſcindatur ex ea portio CG = FA, ducta namque FG, huic ex puncto A ducatur parallela AB, eritque GB tertia proportionalis quaeſita. Eſt enim per diviſionem CF: FA = CG: GB, & eſt CG = FA, ergo CF: FA = FA: GB.

Si ſit CF = a; FA = c, erit GB = $\frac{cc}{a}$; ſi fuerit CF = 1, erit GB = $\frac{cc}{1}$ = cc.

194. Quod ſi inveniri debeat quarta proportionalis tri-

bus

bus rectis inter ſe diverſis CF , FA , CG , facta eadem conſtructione habebitur GB quarta proportionalis quaeſita.

Si fuerit CF $= a$, FA $= b$, CG $= c$, erit GB $= \frac{bc}{a}$: ſi CF $= 1$, erit GB $= \frac{bc}{1} = bc$.

PROPOSITIO LXII.

195. Si duo triangula habuerint latera homologa proportionalia , erunt aequiangula (*fig.* 43.)

Super recta EF conſtruatur triangulum FEG aequiangulum triangulo ABC ut ſit angulus GEF = BAC , angulus GFE = BCA , unde reliquus EGF = ABC , erit ergo AC : BC = FE : FG. Sed ponitur CA : BC = FE : FD ; quare FE : FG = FE : FD , unde FD = FG. Item erit AC : AB = FE : EG ; ſed ponitur AC : AB = FE : ED , hinc EG = ED ; Duo igitur triangula FED , FEG aequiangula ſunt , & aequalia ; Eſt autem triangulum FEG aequiangulum triangulo BAC , ergo eidem quoque aequiangulum erit triangulum FED.

COROLLARIA.

196. Si in triangulis ABC , EDF ſit angulus D = B , ſitque praeterea DE : DF = BA : BC , triangulum DEF aequiangulum erit triangulo ABC. Fiat enim in latere BA recta *Be* = DE , & agatur *ef* ipſi AC parallela , erunt triangula ABC , *eBf* aequiangula , quare *Be* : B*f* = BA : BC. Sed ponitur DE : DF = BA : BC , ergo *Be* : B*f* = DE : DF ; Eſt autem *Be* = DE , hinc B*f* = DF , unde triangula B*ef* , DEF ſunt inter ſe aequalia , & ſimilia . Sed triangulum B*ef* aequiangulum eſt triangulo ABC , quare triangulum DEF eſt aequiangulum triangulo ABC.

197. In quolibet triangulo BAC ſi bifariam ſecetur an-

 gulus

gulus BAC per rectam AD, quae conveniat in D cum latere BC, erit $AB : AC = BD : DC$, & ſi fuerit $AB : AC = BD : DC$, angulus BAC bifariam ſecabitur a recta AD; tandem ſi bifariam dividatur angulus exterior CAH per rectam AG, erit $AB : AC = BG : GC$ (*fig.* 44.) Ductis enim a punctis C, B rectis CO, BF ipſi AF perpendicularibus triangula BDF, COD latera habebunt proportionalia, quare erit $BD : DC = BF : CO$. Sed & triangula ABF, ACO habent latera proportionalia, erit ergo $BF : CO = AB : AC$, unde $AB : AC = BD : DC$. Vel etiam ducta a puncto D recta DK ipſi AC parallela, erit $AK = KD$, ob aequalitatem angulorum BAD, DAC, ADK; Erit ergo $BK : KA = BK : KD = BA : AC$. Sed $BK : KA = BD : DC$, ergo $BA : AC = BD : DC$.

Quoniam vero $BA : AC = BK : KD = BD : DC = BK : KA$, erit $KD = KA$, quare angulus $KAD = KDA$ & BKD duplus eſt ejuſdem KAD. Sed eſt $BKD = BAC$, ergo BAC duplus eſt ipſius BAD, unde $BAD = DAC$.

Demum quoniam ducta CE ipſi AG parallela eſt angulus $ACE = CAG$, qui eſt $= GAH = AEC$, erit angulus $ACE = AEC$, quare $AE = AC$, unde $AB : AC = AB : AE = BG : GC$.

198. Hinc ſi recta BD bifariam ſecet angulum ABC, erit $AB + BC > 2BD$ (*fig.* 45.) Nam ſi punctum D cadat in medio baſis AC, patet fore $AB = BC$, & angulos ad D utrinque rectos, unde erit $AB > BD$, nec non $BC > BD$, adeoque $AB + BC > 2BD$. Sin vero alterutrum ſegmentum AD altero DC majus eſt, erit & $AB > BC$, poſitaque $BG = BC$, juncta CG perpendicularis fiet in F ipſi BD, & diviſa AC bifariam in E, ac per E ducta HE parallela GC, quae occurret BD productae in I, cui pariter perpendicularis erit, fiet $AH = HG$; unde $AB + BG$, ſeu $AB + BC = 2BH$; Sed BH oppo-

oppoſita angulo recto I eſt > BI, ac proinde multo major quam BD, ergo AB + BC > 2BD.

199. In triangulo rectangulo BAC ducta ab angulo recto A ad baſim normali AD erunt triangula BAD, CDA aequiangula inter ſe, & toti triangulo BAC, proindeque erunt ſimilia (*fig.* 46.) Cum enim ſit angulus BAC = ADB, ſunt enim ambo recti, & angulus ad B utrique triangulo BAC, BDA communis, erit reliquus BAD = BCA. Eodem modo oſtendetur triangulum ADC aequiangulum triangulo BAC. Et quoniam angulus BAD eſt = BCA, & anguli ad D ſunt recti, ideoque aequales, erit reliquus angulus ABD = DAC, quare & triangula BAD, CAD ſunt aequiangula; erit ergo BC : CA = CA : CD, & CB : BA = BA : BD; denique BD : DA = DA : DC, unde latus BA erit medium proportionale inter latus BC, & ſegmentum BD, latus vero AC medium proportionale inter idem latus BC, & ſegmentum CD, normalis autem media proportionalis inter ſegmenta BD, DC.

PROPOSITIO LXIII.

200. In quolibet triangulo RGH ſi dividatur recta GH bifariam in E, & agatur per punctum R recta RA ipſi GH parallela, & per punctum E quaevis recta KA, erit haec harmonice ſecta in punctis E, M (*fig.* 47.)

Cum enim ſit GE = EH, erit RA : EH = RA : GE, unde AK : KE = AM : ME, & permutando AK : AM = KE : EM.

COROLLARIA.

201. Hinc ſi ex vertice R trianguli ducatur ad punctum E dimidium baſeos recta RE, erunt quatuor rectae RA, RM, RE, RK harmonicales.

202. Quod ſi rectae RA, RM, RE, RK ſecent harmonice rectam AK, ducta per quodlibet punctum E huiuſmodi diviſionis recta HEG parallela alteri ex harmonicalibus RA ſecabitur ab aliis biſariam in puncto E. Nam cum ſit AK : KE = AM : ME, & AK : KE = RA : EH, & AM : ME = RA : GE, erit RA : EH = RA : GE, unde EH = GE.

PROPOSITIO LXIV.

203. In triangulo RGH ducta DF baſi GH parallela, ductiſque rectis GF, HD ſe invicem ſecantibus in puncto C, junctaque RC, & producta uſque ad baſim in puncto E, erit haec harmonice ſecta in punctis C, B.

Eſt enim ER : RB = GR : RD = GH : DF = GC : CF = EC : CB, unde conſtat propoſitum.

COROLLARIUM.

204. Quoniam vero eſt GE : DB = ER : RB : = EC : CB = GE : BF, vel EH : DB, erit DB = BF, & GE = EH.

PROPOSITIO LXV.

205. Si recta AB ſecta ſit harmonice in punctis A, C, D, B per harmonicales AE, CE, DE, BE, quae vel in idem punctum convergant, vel ſint inter ſe parallelae, quaelibet alia recta MN quoquomodo ducta, & ab extremis harmonicalibus AE, EB terminata erit ab iiſdem harmonice ſecta (*fig.* 38.)

Si rectae harmonicales ſint parallelae, evidens eſt quod cum lineae rectae ad ſe invicem inclinatae in eadem ratione dividantur, proindeque cum ſit AB : BD = MN : NK, & AC :

CD

$CD = MH : HK$, erit $MN : NK = MH : HK$, quare recta MN ſecatur harmonice ab iisdem rectis.

Si harmonicales conveniant in eodem puncto E (*fig.* 48.) ducatur per quodlibet punctum D recta GDF parallela alteri ex harmonicalibus AE ſecans EB in F, & producta EC in G, erit $DF = DG$, quare ſi per quodvis aliud punctum K ejusdem rectae ED ducatur HKL eidem AE parallela ſecans quamlibet aliam MN ductam per idem punctum K, ita & ipſa ſecabitur a recta ED in K, ut ſit $HK = KL$; erit ergo $EM : LK = EM : HK$; ſed $EM : LK = MN : NK$, & $EM : HK = MO : OK$, quare $MN : NK = MO : OK$, unde ipſa MN ſecabitur harmonice in punctis O, K ab hiſce harmonicalibus.

COROLLARIA.

206. Hinc liquet rectas harmonicales EA, EC, ED, EB in eodem puncto E coeuntes ita diſpoſitas eſſe, ut per quodlibet punctum alterius ex iisdem ducta qualibet recta alteri ipſarum parallela ab aliis biſariam ſecetur.

207. Quod ſi contra quatuor rectae ita diſponantur ut ſi ab eodem puncto E procedant, & ducta aliqua recta ipſarum alteri parallela biſariam ſecetur ab aliis tribus, quatuor illae erunt harmonicales.

PROPOSITIO LXVI.

208. Si ab aliquo puncto E extra rectam AB contrharmonice ſectam accepto ducantur ad puncta diviſionum rectae EA, EC, ED, EB, & a puncto D agatur DF ipſi AE parallela, quae DF conveniat in puncto F cum EB & in puncto G cum EC producta, erunt rectae GD, AE, DF continue proportionales.

Cum

Cum enim ſimilia ſint triangula EBA, FBD, nec non triangula ECA, GCD, erit AE : DF = AB : BD = DC : CA = DG : AE, unde DG : AE = AE : DF.

PROPOSITIO LXVII.

209. Si a puncto F ducatur FC conveniens cum EA in puncto P, erunt etiam continue proportionales tres rectae AE, FD, AP.

Cum ſit enim AE : FD = AB : BD = DC : CA = FD : AP, liquet ſtatim propoſitum.

PROPOSITIO LXVIII.

210. In triangulis aequiangulis ABC, *abc* ductis ab aequalibus angulis B, *b* normalibus ad oppoſita latera AC; *ac*, erit BQ : *bq* = AC : *ac* (*fig.* 49.)

Cum enim hypotheſi ſit angulus A = *a*, & anguli AQB, *aqb* ſint recti, triangula AQB, *aqb* erunt aequiangula, quare AB : *ab* = BQ : *bq*. Sed eſt AB : *ab* = AC : *ac*, ergo BQ : *bq* = AC : *ac*.

PROPOSITIO LXIX.

211. Si duae figurae ſimiles in triangula per diagonales ex angulis homologis ductas utcumque dividantur, triangula homologa erunt ſimilia.

In figuris ABCDE, *abcde* ſit angulus A = *a*, B = *b*, C = *c*, D = *d*, E = *e*, ſitque AB : *ab* = BC : *bc* = CD : *cd* = DE : *de* = EA : *ea*, ductis diagoniis AC, *ac*, & AD, *ad*, ſimilia erunt triangula ABC, *abc*, & ACD, *acd*, nec non ADE, *ade*, aequales ſunt enim anguli B, & *b*, & lateribus proportionalibus comprehenduntur, unde ſimilia

ſunt

ſunt triangula ABC, *abc*; & ADE; *ade*, quare angulus BAC = *bac*, DAE = *dae*; Ergo BAE — BAC — DAE = CAD = *bae* — *bac* — *dae* = *cad*, unde angulus CAD = *cad*. Item oſtenditur angulos ACD, *acd*, & ADC, *adc* aequari inter ſe, adeoque triangula ACD, *acd* ſunt aequiangula.

PROPOSITIO LXX.

212. Duae quaelibet figurae ſimiles ſunt, ſi in triangula aequiangula reſolvi poſſint.

Enim vero ob angulos aequales in triangulis aequiangulis aequantur anguli homologi in unaquaque figura. Cum ergo figurarum latera ſint latera triangulorum aequiangulorum proportionalia, figurae ſimiles ſunt.

COROLLARIA.

213. Ex duabus hiſce propoſitionibus, atque ex modo deſcribendi angulum alteri angulo aequalem conligitur ratio, qua ſuper data recta ED rectilineum EDCBA ſeu figura rectorum laterum ſimilis, & ſimiliter poſita datae figurae rectilineae *edcba* conſtruatur. Reſoluto namque rectilineo dato *edcba* in triangula *aed*, *adc*, *acb* ſuper recta ED fiat angulus DEA = *dea*, & angulus EDA = *eda*, deinde angulus ADC = *adc*, & angulus DAC = *dac*, denique conſtruatur angulus CAB = *cab*, & ACB = *acb*, erit figura rectilinea EDCBA ſimilis ac ſimiliter poſita datae *edcba*. Cum enim triangula AED, *aed* ſint aequiangula, habebunt circa angulos D, *d* latera proportionalia, nempe erit ED : DA = *ed* : *da*, & cum ſit angulus ADC = *adc*. & DAC = *dac*, erit pariter angulus ACD = *acd*. Cum autem ſit ED : DA = *ed* : *da*, & DA : DC = *da* : *dc*,

erit

erit ex aequo ordinate ED : DC = *ed* : *de*. Eodem modo oſtendetur DC : CB = *de* : *cb*, & CB : BA = *cb* : *ba*, & BA : AE = *ba* : *ae*, denique AE : ED = *ae* : *ed*, unde conſtat propoſitum.

CAPVT VIII.

De Proportionibus linearum rectarum quoad poſitionem earundem reſpectu circuli.

PROPOSITIO LXXI.

214. IN ſemicirculo ADEB ſi ex centro C erigatur CF normalis diametro AB, & ducatur quaelibet BF ſecans circulum in puncto E, & recta AE ſecans CF in puncto G, erit FC : CD = DC : CG (*fig.* 25.)

Sunt enim triangula BCF, AGC ſimilia. Nam rectus angulus FCB eſt = ACG, & angulus BFC = GAC, itaque FC : CB = AC : CG; ſunt autem rectae CB, & AC aequales ipſi CD, ergo FC : CD = CD : CG.

PROPOSITIO LXXII.

215. Normalis AO ex quolibet puncto circumferentiae circuli in diametrum demiſſa eſt media proportionalis inter duo ſegmenta EO, OR (*fig.* 22.)

Ductis ex puncto A ad extremà diametri rectis AE, AR, triangulum EAR rectangulum eſt ad A, hinc EO : AO = AO OR.

Diametri pars EO inter normalem & circumferentiam comprehenſa vocatur *abſciſſa*, normalis vero dicitur *ordinata*.

CORQL-

COROLLARIUM.

216. Hinc inveniri poterit media proportionalis inter binas rectas M, N, ſi ſumta indefinita EP abſcindantur in ipſa portiones EO = N, & OR = M, & ſuper ER deſcripto circulo erigatur ex puncto O recta OA normalis ad ER, quae erit media proportionalis inter propoſitas rectas M, N.

Si ſit $M = a$, $N = b$, $AO = x$, erit AO ſive $x = \sqrt{ab}$

PROPOSITIO LXXIII.

217. Si binae rectae AB, CD ſe invicem ſecuerint vel intra vel extra circulum in aliquo puncto E, chordarum ſegmenta erunt reciproce proportionalia. (*fig.* 50. 51.)

Ductis namque rectis AD, CB, triangula EAD, ECB erunt ſimilia, unde AE : ED = CE : EB, eritque permutando AE : CE = ED : EB.

COROLLARIA.

218. Hinc ſi binae rectae AB, CD ita ſe invicem ſecent, ut ſit AE : ED = CE : EB circulus per quatuor puncta A, C, B, D traduci poterit. Si enim per tria tantum tranſiret, alteram vero ex iiſdem rectis ſecaret in aliquo puncto R, foret AE : ER = CE : EB = AE : ED, unde ER = ED, quod eſt abſurdum.

219. Si ex puncto O extra circulum adſumto (*fig.* 51.) ducantur tangens OA, & PO circulum ſecans in N, erit PO : OA = OA : ON. Ductis namque rectis NA, AP, ſimilia ſunt triangula OAP, OAN ob angulum ad O communem; & angulos OPA, OAN aequales, unde angulus

ANO = OAP, proindeque PO : OA = OA : ON, nempe tangens eſt media proportionalis inter totam rectam OP, & partem externam ON.

220. Hinc duae tangentes OA, OC ex eodem puncto O ad circuli peripheriam ductae ſunt inter ſe aequales. Cum enim ſit PO : OA = OA : ON, itemque PO : OC = OC : ON, neceſſe eſt ut eadem ſit media proportionalis inter rectas PO, ON, unde OA = OC.

221. Hinc etiam eruitur ratio qua data recta ita dividatur, ut tota ſit ad partem majorem, ut pars major ad alteram, quod dicitur *datam rectam extrema, ac media ratione ſecare*. Sit igitur data recta DR extrema, ac media ratione ſecanda (*fig.* 13.) Super datae rectae extremum D excitetur normalis DC, quae ſit aequalis ſemiſſi ipſius DR, & centro C intervallo CD deſcribatur circulus DAEB, deinde per puncta R, C ducatur recta RQ, & centro R radio RH deſcribatur arcus HO, qui datae rectae DR occurret in puncto quod quaerebatur. Et quidem ob tangentem DR eſt QR : RD = RD : RH, quare QR − RD : RD = RD − RH : RH. Sed QR − RD = RO; eſt enim QH = RD, quippe duplae ipſius CD, quae eſt ſemiſſis rectae RD. Eodem modo RD − RH = DO, quare ſubſtitutione facta erit RO : RD = DO : OR, ſive RD : OR = OR : DO.

Si fuerit RD = 500, OR = $309 \frac{4}{235}$, DO = $190 \frac{231}{235}$ erit RDO = $95491 \frac{23}{47}$, OR² = $95491 \frac{28686}{55225}$, & haec ferme aequantur.

Si ſit RD = 5, OR = $3 \frac{1}{11}$, DO = $1 \frac{10}{11}$, erit RDO = $9 \frac{6}{11}$, RO² = $9 + \frac{6}{11} + \frac{1}{121}$.

222. Si

222. Si fuerit FO : OC = OC : OI, erit OC circuli tangens. Ex puncto O ducatur tangens OA, & ex centro circuli V (*fig.* 51.) agantur rectae VC, VO, VA, erunt igitur triangula OCV, OAV, aequiangula. Eſt autem angulus OAV rectus, ergo huic aequalis OCV erit itidem rectus, proindeque OC eſt tangens.

223. Ductis ex quolibet puncto E ſecantibus BAE, DCE (*fig.* 50.) ductiſque rectis AC, BD, erit angulus EAC = EDB, & angulus ECA = EBD. Eſt enim BE : ED = EC : EA, unde ſimilia ſunt triangula CEA, BED, ideoque angulus EAC = EDB, & ECA = EBD.

224. In quolibet triangulo rectangulo alterum ex lateribus circa rectum angulum eſt medium proportionale inter aggregatum, & differentiam aliorum laterum, ut patet.

PROPOSITIO LXXIV.

225. Data ex tribus proportionalibus media DR, & extremarum differentia ED invenire extremas HR, & RQ (*fig.* 23.)

Datarum differentia ED normaliter erigatur ſupra mediam DR, eaque bifariam ſecta in C intervallo CD deſcribatur circulus, & ex altero extremo R mediae DR agatur per centrum recta RCQ, erunt HR, DR, RQ continue proportionales; Eſt enim DR tangens, & RQ ſecans circuli, unde conſtat propoſitum.

PROPOSITIO LXXV.

226. Data media AK, & extremarum aggregato AB invenire extremas.

Dividatur bifariam AB in C, & radio CA deſcribatur circulus, in quo aptetur recta AD dupla mediae AK,

 deinde

deinde ſecta bifariam AD in K per normalem LN, erunt LK, & KN extremae quaeſitae. Eſt enim NK : KA = DK, vel KA : KL. Eſt autem NL aggregatum extremarum, aequatur enim ipſi AB, ergo patet propoſitum.

PROPOSITIO LXXVI.

225. In circulo ABC ductis quibuslibet rectis AB, AC, ductaque tangente FAG ad punctum A, ſi huic parallela ducatur infra, aut intra recta DE, vel *de*, erit AD : AE = AC : AB (*fig.* 52.)

Cum enim in triangulis ABC, AED ſit angulus C = FAD = EDA, & angulus A utrique triangulo communis, triangula ipſa erunt ſimilia, quare AD : AE = AC : AB.

PROPOSITIO LXXVII.

228. Si ex termino diametri EF circuli CABD ſumantur arcus hinc inde aequales FB, FD, & ducta qualibet AE, quae occurrat perimetro in A, agatur DA ſecans EF in O, erit FE : EI = FO : OI, quae eſt diviſio harmonica (*fig.* 50.)

Iungatur FA, & ex puncto I ducatur illi parallela KIV; Et quoniam eſt angulus FAD = AQI, adpoſito communi OAI, erit angulus FAI = AQI + OAI. Sed angulus FAI aequatur recto, ergo aequantur recto & poſteriores; reliquus itaque angulus AIQ rectus erit, rectuſque pariter ipſi adjacens AIK. Sed angulus AQI = AKI, qui aequatur angulo BAF = FAD, & latus AI eſt commune duobus triangulis AIK, AIQ; ergo ipſa aequantur inter ſe, unde KI = IQ. Eſt autem FO : OI = AF : IQ, vel KI, & AF : KI = EF : EI ob ſimilitudinem triangulorum AOF, IOQ, & AFE, EKI, ergo patet propoſitum.

SE-

SECTIO II.

DE GEOMETRIA SUPERFICIERUM.

CAPUT I.

De Proportionibus ſuperficierum, ſive Figurarum.

DEFINITIO

229. Parallelogrammi, vel trianguli cujuslibet *altitudo* eſt perpendicularis quae ab ipſorum vertice vel angulo ſuperiore in baſim demittitur.

COROLLARIUM.

230. Parallelogramma igitur, vel triangula ſub iisdem parallelis comprehenſa aequales habent altitudines, proindeque in ipſis lineae rectae ad baſim parallelae duci poterunt numero aequales.

MONITUM.

231. Adnotandum hic eſt quod cum a geometris rectangulum ſemper exprimatur tribus litteris ex: gr: CAB, ſcilicet ex CA × AB (*fig.* 8.) vel lineae ipſae a ſe invicem diſtin-

diſtinctae ſint, vel ſimul conjunctae, vel altera ſit pars alterius, hujuſmodi expreſſione ſemper intelligi debet parallelogrammum CABD lateribus CA, AB normaliter junctis comprehenſum, quibus lateribus ſemper aequantur oppoſita BD, DC prioribus illis parallela.

PROPOSITIO LXXVIII.

232. Dato quolibet parallelogrammo ACEF ſi ducantur normales AB, FD, unde rectangulum ABDF efformetur, rectangulum erit ad parallelogrammum eandem habens baſim AF in ratione aequalitatis (*fig.* 53.)

Ducta enim ex quovis puncto N recta NR ipſi AF parallela, erit ſemper NQ = PR, aequantur enim ipſi AF, unde colligendo omnes ſimul rectae in rectangulo ad omnes ſimul rectas in parallelogrammo, ſcilicet rectangulum erit ad parallelogrammum in ratione aequalitatis.

PROPOSITIO LXXIX.

233. Parallelogramma eandem altitudinem habentia ſunt inter ſe ut baſes (*fig.* 54.)

Per quodlibet punctum H agatur recta HKM baſi BG parallela, erit ergo ſemper HK = BC, & KM = CG, unde HK : BC = KM : CG, & permutando HK : KM = BC : CG, quare colligendo omnes ſimul rectae in parallelogrammo ABCD ad omnes ſimul rectas in parallegrammo DCGF, ut baſis BC ad baſim CG, ſcilicet parallelogrammum ABCD ad parallelogrammum DCGF erit in ratione baſeos BC ad baſim CG.

Item in triangulis ABC, ECG ducta HM ipſi BG parallela, erit BC : HR = BA : AH = GF : FM = EG, EL = CG : NL, & permutando BC : CG = HR : NL; & hoc

& hoc ſemper, unde colligendo omnes ſimul rectae parallelae in triangulo ABC erunt ad omnes ſimul parallelas in triangulo ECG nempe triangulum ABC erit ad triangulum ECG ut baſis BC ad baſim CG.

COROLLARIA.

234. Hinc ſi parallelogramma ACEF, GHKM (*fig.* 53.) habuerint baſes aequales, altitudines vero, ſive perpendiculares AB, GI inaequales, erunt parallelogramma inter ſe ut eaedem altitudines ſive perpendiculares. Ductis namque perpendicularibus FD, ML, completiſque rectangulis ABDF, GILM intelligatur latus, vel perpendicularis AB tanquam baſis rectanguli GILM, erit ergo rectangulum ABDF ad rectangulum GILM ut baſis AB ad baſim GI, quare & parallelogrammum ACEF ad parallelogrammum GHKM eſt ut perpendicularis, ſive altitudo AB ad altitudinem GI. Idem ſimiliter demonſtrabitur de triangulis.

235. Quod ſi parallelogramma, & triangula eandem habeant baſim, vel baſes aequales, & eandem pariter habeant altitudinem, ſcilicet in iisdem ſint parallelis, erunt inter ſe aequalia. Cum enim parallelogramma, & triangula ejusdem altitudinis ſint inter ſe ut baſes, ſi hae ponantur aequales, parallelogramma quoque, & triangula erunt aequalia.

236. Quod ſi parallelogramma & triangula ſint aequalia, & baſes habeant aequales, eandem pariter habebunt altitudinem, ſcilicet in iisdem erunt parallelis. Contra vero ſi fuerint aequalia, & eandem habeant altitudinem, nempe in iisdem parallelis conſtituantur, eandem habebunt baſim; ſi enim ſive altitudines, ſive baſes inaequales forent, parallelogramma ipſa, vel triangula eſſent inaequalia.

PRO-

PROPOSITIO LXXX.

237. Parallelogramma AD , DG inter ſe aequalia , & angulum BDC aequalem angulo EDF habentia latera habent reciproce proportionalia , ſcilicet eſt CD : DE = FD : DB , & ſi habeant latera reciproce proportionalia , ſunt inter ſe aequalia (*fig.* 55.)

Producantur latera AB , GE uſque ad concurſum in H . Eſt quidem parallelogrammum AD ad parallelogrammum BE , ut baſis CD ad baſim DE , eademque ratione parallelogrammum GD eſt ad parallelogrammum EB ut baſis FD ad baſim DB . Sed ex hypotheſi aequantur parallelogramma AD , GD , quare eandem habent ad parallelogrammum DH rationem , ratio igitur ipſius CD : DE eadem eſt cum ratione FD : DB , eſt nempe CD : DE = FD : DB . Quod ſi fuerit CD : DE = FD : DB erit parallelogrammum AD ad parallelogrammum BE ut parallelogrammum GD ad parallelogrammum BE ; unde parallelogrammum AD aequatur parallelogrammo DG . Eadem plane eſt demonſtratio pro triangulis . Nam triangula CBD , EBD ſunt in ratione baſium CD , DE , triangula vero FED , BED in ratione FD : DB .

COROLLARIA.

238. In parallelogrammis igitur & triangulis aequalibus altitudines ſunt baſibus reciprocae , & ſi altitudines ſint baſibus reciprocae , parallelogramma , & triangula aequalia ſunt inter ſe .

239. Si igitur quatuor rectae proportionales fuerint , nempe CD : DE = FD : DB , rectangulum ſub extremis CD , DB aequatur rectangulo ſub mediis DE , FD , & con-

contra. Facto enim rectangulo AD ſub exrtemis, & DG ſub mediis cum ſint recti anguli ad D, & rectangulorum latera reciproce proportionalia, ipſa erunt inter ſe aequalia. Contra cum rectangula AD, DG aequales habeant angulos, & ſint inter ſe aequalia, erit CD : DE = FD : DB.

239. Si lineae proportionales fuerint tres, quadratum mediae aequatur rectangulo ſub extremis. Si enim ponatur DE = DF, ut ſint tres proportionales CD, DE, DB erit CD : DE = FD : DB, quare cum ſit rectus angulus ad D tum in quadrato, tum in rectangulo, quadratum DG aequatur rectangulo CB.

240. Hinc conſequitur in circulo ARBE (*fig.* 12.) quadratum normalis AO aequari rectangulo EOR, quod alibi analytice enunciavimus. Conſequitur praeterea in triangulo rectangulo quadratum hypothenuſae aequari quadratis laterum rectum angulum comprehendentium. Et quidem in triangulo rectangulo EAR cum ſit OR : RA = : RA : RE, erit $RAq = ERO$, itemque cum ſit EO : EA = EA : ER, erit $EAq = REO$, ergo $RAq + EAq = OR \times ER + EO \times ER = (OR + EO)\ ER = ER \times ER = ERq$.

241. Unde patet, quod ſi trianguli latera rectum angulum comprehendentia ſint inter ſe aequalia, quadratum hypothenuſae duplum erit quadrati, quod ſub alterutro latere conſtituitur.

SCHOLION.

242. Poſuimus in praecedente corollario linearum aequalium aequalia eſſe quadrata; quod quidem patet ex ſuperpoſitionis principio. Nam ſi lineae ſint aequales, & una alteri ſuperponatur, congruent ipſae inter ſe; Cum ergo & anguli ſint aequales nempè recti, congruent & ipſi inter

ſe, ideoque totum quadratum congruet toti quadrato; Quinimo quadratorum aequalium aequales ſunt lineae; Aequalia enim quadrata congruunt inter ſe, ob aequalitatem angulorum, igitur & lineae; alias unum quadratum altero majus eſſet.

243. Ceterum hujuſce propoſitionis beneficio theoria proportionis linearum demonſtrari poſſet, ut de ſe patet.

PROPOSITIO LXXXI.

244. Propoſitis quotcumque quadratis unum omnibus aequale conſtruere (*fig.* 55.)

Propoſita ſint tria quadrata, quorum latera ſint LM, P, Q. Fiat angulus rectus FGH infinita habens latera, in eaque transferantur GF = LM, & GE = P, & jungatur EF, erit $EFq = LMq + Pq$. Tum EF transferatur ex G in Z, & Q in GX, & jungatur ZX, erit $ZXq = ZGq + GXq = LMq + Pq + Qq$.

PROPOSITIO LXXXII.

245. Datis duabus rectis inaequalibus RC, CO exhibere quadratum, quo quadratum majoris RC excedit quadratum minoris CO (*fig.* 12.)

Centro C intervallo CR deſcribatur circulus, & in diametro RE a centro C verſus E ponatur CO. Ex O erigatur normalis OA occurrens peripheriae in A, erit OAq exceſſus qui quaerebatur. Ducatur enim CA; Eſt quidem $CAq = COq = OAq$, ergo patet propoſitum.

PROPOSITIO LXXXIII.

246. Si fuerit $APq = ACq + BCq$, angulus ACB, quem reliqua latera comprehendunt, rectus erit (*fig.* 56.)

Duca-

Ducatur EC normalis ad AC, & aequalis ipſi CB, & jungatur AE. Eſt $AEq = ACq + CEq = BCq + CAq = ABq$, ergo $AE = AB$. Quoniam igitur triangula CAB, CAE ſunt ſibi mutuo aequilatera, anguli ad C ſunt aequales, ac proinde recti.

PROPOSITIO LXXXIV.

247. Latus quadrati eſt diametro incommenſurabile, ſcilicet latus, & diameter nullam habent menſuram communem.

Cum enim diameter ſit hypothenuſa trianguli rectanguli, cujus latera aequantur inter ſe, quadratum diametri aequatur duplo quadrato lateris. Sed radix quadrata dupli numeris exprimi non poteſt, ut conſtat ex arithmeticis, quare ſi quadrati latus numeris exprimatur, exprimi non poterit diameter, & viceverſa.

SCHOLION.

248. Hic obſervari poterit diametrum quadrati ad latus eſſe ut $99 : 70$ proxime; Eſt enim $70q = 4900$, cujus duplum eſt 9800, & $99q = 9801$.

In triangulo aequilatero normalis ad latus eſt ut $97 : 112$. proxime. Nam $97q = 9409$, & $56q$, quod eſt dimidium lateris, eſt $= 3136$, ipſorum igitur aggregatum eſt 12545, & $112q = 12544$.

Quod ſi ſiat $70 : 112 = 99 : \frac{11088}{70} = 158 \frac{4}{10}$, erit $158 \frac{4}{10}$ diameter quadrati, cujus latus eſt 112, quare normalis trianguli aequilateri ad diametrum quadrati ejusdem lateris eſt ut $97 : 158 \frac{4}{10} = 970 : 1584 = 485 : 792$.

 PRO.

PROPOSITIO LXXXV.

249. Dato triangulo BDC, poſitaque CO media proportionali inter BC, CD, & radio CO deſcripto arcu OK, ductaque chorda KO, erit triangulum COK aequale triangulo CDB (*fig.* 55.)

Eſt enim BC : CO = CK : CD, nempe circa communem angulum C latera eorundem triangulorum ſunt reciproca, ac proinde triangula ipſa ſunt aequalia.

PROPOSITIO LXXXVI.

250. Parallelogramma CB, DG, ut & triangula BDC; EDF angulum CDB aequalem angulo FDE habentia ſunt in ratione laterum compoſita.

Adſumatur recta LM quarta proportionalis tribus rectis DB, DF, DE, erit parallelogrammum CB ad parallelogrammum DG ut CD : LM. Productis enim lateribus AB, GE uſque ad ipſorum concurſum in H eſt parallelogrammum CB ad parallelogrammum BE ut baſis CD : DE. Item parallelogrammum BE eſt ad parallelogrammum DG ut DB : DF. Sed DB : DF = DE : LM, quare parallelogrammum BE ad parallelogrammum DG eſt ut DE : LM, hinc tria parallelogramma CB, BE, DG ſunt ex aequo ordinate ut tres rectae CD, DE, LM, unde erit primum CB ad tertium GD ut CD : LM. Quoniam vero triangula ſunt ſemiſſes parallelogrammorum, ut alibi oſtendemus, quod de his demonſtratum eſt de illis quoque comprobatur.

SCHO-

SCHOLION.

151. Adnotandum hic eſt parallelogramma & triangula licet nullum habeant angulum aequalem, tamen eſſe in ratione baſium, & altitudinum compoſita, quod quidem ut ſupra demonſtratur ſumta quarta proportionali poſt altitudinem primi, & altitudinem ſecundi, nec non baſim ejuſdem ſecundi.

PROPOSITIO LXXXVII.

152. Sint in triangulo ABC anguli BAC, DAE duobus rectis aequales, erit rectangulum BCD : BED = CA*q* : AE*q* (*fig.* 57.)

Ducatur per E ipſi AC parallela EF, erit ergo angulus DAE = AFE, & rectangulum FEG = AE*q*, ob ſimilitudinem triangulorum FEA, AEG. Itaque quoniam AC : FE = CB : BE, ut autem CA : GE = CD : DE, erit ratio compoſita ex AC : FE, & ex CD : DE eadem quae componitur ex CB : BE, & ex CD : DE. Sed ratio compoſita ex AC : FE, & ex AC : GE eſt ratio ipſius CA*q* ad rectangulum FEG, hoc eſt ad AE*q*, compoſita vero ex ratione CB : BE, & ex ratione CD : DE eadem eſt quae rectanguli BCD : BED; eſt igitur ut rectangulum BCD : BED = CA*q* : AE*q*.

SCHOLION.

153. Exinde vero conſtat erraſſe *Pappum*, qui prop. 27. lib. 7. ex iisdem datis deducit eſſe CBE : CDE = CA*q* : AE*q*.

PRO-

PROPOSITIO LXXXVIII.

254. Figurarum ſimilium perimetri ſunt ut latera homologa (*fig.* 49.)

Eſt AE : ED = *ae* : *ed*, & permutando Ae : *ae* = ED : *ed*. Item oſtenditur eſſe ED : *ed* = DC : *dc*, & DC : *dc* = CB : *cb*; & CB : *cb* = BA : *ba*, ergo ſumma antecedentium ad ſummam conſequentium, ideſt AE + ED + DC + CB + BA : *ae* + *ed* + *dc* + *cb* + *ba* = AB : *ab*, ſcilicet perimeter primae figurae eſt ad perimetrum ſecundae ut latus homologum AE ad latus homologum *ae*.

PROPOSITIO LXXXIX.

255. In triangulis ſimilibus ſuperficies ſunt in ratione duplicata, vel ut quadrata laterum homologorum.

Conſtructis enim quadratis AD, *ad* ſupra rectas AC, *ac*, quod facile obtinetur, ſi ex punctis C, A erigantur normales CD, AE aequales ipſi AC, & jungatur ED, idemque fiat ſupra *ac*, ductis diagoniis AD, *ad*, triangula ABC, DCA utpote eandem baſim AC habentia erunt ut altitudines, nempe ABC, DCA = BQ : CD, ſive AC eademque ratione *abc* : *dca* = *bq* : *ac*, quare ABC : DCA = *abc* : *dca*, & permutando ABC : *abc* = DCA : *dca* = CE : *ce*.

COROLLARIA.

256. Exinde oſtendi poteſt polygona ſimilia, ſeu ſimiles figuras plurium laterum eſſe itidem in ratione duplicata laterum homologorum. Cum enim quodlibet latus primi polygoni proportione reſpondeat lateri alterius homologo, erunt pariter ſingula latera prioris, ſive tota ejus perimeter ad ſingula

Digitized by Google

gula latera poſterioris, vel ejus perimetrum, ut unum latus prioris ad homologum latus poſterioris. Cum autem ſit triangulum ABC ad triangulum *abc* in ratione duplicata BC : *bc*, & triangulum CAD ad *cad* in ratione pariter duplicata CD : *cd*, quae eſt eadem cum ratione BC : *bc*, denique triangulum DAE : *dae* in ratione duplicata DE : *de*, ſeu CD : *cd*, erunt ſingula triangula polygoni ABCDE ad ſingula triangula alterius ſimilis *abcde*, ſive polygonum ABCDE ad ſimile polygonum *abcde* in duplicata ratione laterum homologorum.

257. Unde illud conſequitur, quod ſi propoſitis tribus rectis continue proportionalibus deſcribantur quaelibet figurae ſimiles ſuper prima, & ſecunda, erit figura, quae ſuper prima deſcribitur, ad figuram quae deſcribitur ſuper ſecunda ut prima ex tribus rectis ad tertiam. Nam prima figura ad ſecundam, eſt in ratione duplicata primae rectae ad ſecundam. Sed ratio primae ad tertiam eſt pariter duplicata rationis primae rectae ad ſecundam, ergo patet propoſitum.

258. Quoniam ergo in triangulo rectangulo BAC (*fig.* 46.) ducta a vertice anguli recti normali AD in baſim eſt BC : CA = CA : CD erit figura ſuper hypothenuſa BC deſcripta ad ſimilem figuram ſupra latus AC ut BC : CD; eademque ratione eadem ipſa figura ſupra BC ad ſimilem figuram ſupra AB erit ut BC : BD, ergo figura ſupra BC ad ſimiles figuras ſupra latera AC, AB erit ut BC : BD + DC, ſcilicet in ratione aequalitatis.

PROPOSITIO XC.

259. Si recta ER utcumque dividatur in O, rectangulum RE x EO ad EO*q* + ROE eſt in ratione aequalitatis (*fig.* 12.)

Deſcripto namque ſemicirculo RAE ſupra ER, erigatur normalis OA, & ducantur RA, AE, erit rectangulum REO = AE*q* = AO*q* + EO*q* = EO*q* + ROE.

PRO-

PROPOSITIO XCI.

260. Quadratum totius ER utcumque ſectae in O eſt ad rectangulum REO + ERO in ratione aequalitatis.

Eſt enim $RAq = ERO$, & $AEq = REO$. Sed $ARq + AEq = ERq$, ergo ERq eſt ad $ERO + REO$ in ratione aequalitatis.

COROLLARIUM.

261. Hinc quoniam $ERq = ERO + REO = EOR + ORq + REO$, erit $EAq - ORq = EOR + REO = (ER + RO) EO$, nempe duorum quadratorum differentia eſt ad rectangulum ex laterum ſumma in eorumdem differentiam in ratione aequalitatis.

PROPOSITIO XCII.

262. Quadratum totius ER eſt ad $ROq + OEq + 2OE \times OR$ in ratione aequalitatis.

Eſt namque $ERq = ARq + AEq = AOq + ROq + AOq + OEq = ROq + OEq + 2AOq = ROq + OEq + 2EOR$.

PROPOSITIO XCIII.

263. Quadrata rectarum RE, & EO ad $ROq + 2REO$ ſunt in ratione aequalitatis.

Eſt enim $REq = ROq + OEq + 2REO$, ergo $REq + EOq = ROq + EOq + EOq + 2ROE = ROq + 2EOq + 2ROE$; Eſt autem $ROE + OEq = REO$, ergo $REq + EOq = ROq + 2REO$.

PRO-

PROPOSITIO XCIV.

264. Si recta RE bifariam ſecetur in C & non bifariam in O, erit CEq ad COq + ROE in ratione aequalitatis.

Eſt quippe CEq, vel $CAq = AOq + OCq = OCq +$ ROE.

COROLLARIUM.

265. Viciſſim ſi fuerit ROE + $COq = CRq$, erit CR = CE. Si negas, eſto alia CF = CR, erit ROF + COq = CRq = ROE + COq, ablato communi COq, erit ROE = ROF, & OE = OF, quod eſt abſurdum.

PROPOSITIO XCV.

266. Quadrata partium inaequalium RO, OE ſunt ad quadrata ſemiſſeos RC, & intermediae CO in ratione dupla.

Eſt $ROq = RCq + COq + 2RCO$, ſive 2ECO, addito communi OEq, erit $ROq + OEq = RCq + COq + OEq$ + 2ECO. Eſt autem $OEq + 2ECO = ECq + COq$, ſive $RCq + COq$, ergo $ROq + OEq = RCq + COq + RCq + COq = 2RCq + 2COq$.

PROPOSITIO XCVI.

267. Si recta TI bifarietur in V, eique in directum adjiciatur quaelibet IO, erit rectangulum TOI + VIq ad VOq in ratione aequalitatis (*fig.* 51.).

Deſcribatur ſupra TI ſemicirculus IBTPA, & ducatur tangens OA; Et quoniam eſt TOI = OAq, erit TOI + $VIq = OAq + AVq = VOq$.

COROLLARIUM.

268. Viciſſim eſto $TOI + TVq = VOq$, erit $TV = VI$ (*fig.* 58.) Alias poſita $VF = TV$, foret $FOT + TVq$ vel $VFq = VOq = TOI + TVq$, ablato communi TVq, eſſet $FOT = TOI$, adeoque $FO = IO$, quod eſt abſurdum, erat ergo $TV = VI$.

PROPOSITIO XCVII.

269. Rectarum TO, OI, quadrata ſunt ad quadrata rectarum TO, VO in ratione dupla.

Cum enim ſit $TOq = TVq + VOq + 2TVO$, vel $IV \times 2VO$, ſi addatur utrobique OIq, erit $TOq + OIq = TVq + VOq + OIq + IV \times 2VO$. Eſt autem $OIq + 2VO \times VI = VOq + IVq +$ vel $VOq + TVq$, quare $TOq + OIq = TVq + VOq + VOq + TVq = 2TVq + 2VOq$.

PROPOSITIO XCVIII.

270. Si recta AB ſecta ſit bifariam in C, ipſique addatur in directum quaelibet BD, erit $4ACD + BDq$ ad ADq in ratione aequalitatis (*fig.* 59.)

Nam eſt $CDq + CBq$, vel $CAq = 2DCB + BDq = 2DCA + BDq$, adpoſito communi $2ACD$, erit $CDq + CAq + 2ACD$; nempe $ADq = 2DCA + BDq + 2ACD = 4ACD + BDq$.

PROPOSITIO XCIX.

271. Si fuerit CB media arithmetica inter AD, & DB, erit $CBq + CDq$ medium arithmeticum inter ADq, & DBq (*fig.* 60.)

Eſt enim $ADq + DBq = 2CBq + 2CDq$. Nam eſt $ADq = AEq + EDq + 2AED = CDq + CEq + 2BCD$, ergo $ADq + DBq = CDq + DBq + CBq + 2BCD = CBq + CDq + DBq + 2BDC + 2CDq = 2CBq + 2CDq$.

PROPOSITIO C.

272. Si fuerint tres rectae in continua proportione arithmetica, erit quadratum maximae ad quadratum minimae plus rectangulo mediae in quadruplum differentiae magnitudinum in ratione aequalitatis (*fig.* 61.)

Deſcripto quadrato FD ſupra maximam, ductaque diametro, & completa figura, patet quadratum maximae FD aequari CD quadrato minimae CG plus quadruplo rectangulo BE plus quadruplo quadrato EH, ſcilicet quadruplo rectangulo CH, quod continetur ſub HB, vel BD media arithmetica, & differentia BC, ergo quadratum maximae AD aequatur quadrato minimae CD plus rectangulo mediae BD in quadruplum differentiae BC.

PROPOSITIO CI.

273. Si altera ex mediis harmonicis CB bifarietur in E, erit rectangulum BAC ad EAD in ratione aequalitatis (*fig.* 62.)

Cum ſit enim AB : AC = BD : DC, erit componendo AB + AC : AC = BC : DC; Sed AE eſt media arithmetica inter AB, & AE, quare AB + AC = 2AE, ergo ſumto antecedentium dimidio erit AE : AC = BE : CD; igitur ſumma quoque antecedentium ad ſummam conſequentium, nempe AB : AD erit in eadem ratione AE : AC, quare rectangulum ſub extremis BAC aequatur rectangulo ſub mediis EAD.

 Si biſa-

Si biſarietur media harmonica DA in F eodem modo demonſtratur rectangulum ABD aequari FBC.

PROPOSITIO CII.

274. Iisdem poſitis erit quadratum CE ad rectangulum AED in ratione aequalitatis.

Cum enim ſit BC biſariam ſecta in E, ſi eidem addatur CA, erit $AEq = BAC + CEq$. Sed $AEq = EAD + AED$, ergo ob $BAC = EAD$, erit $CEq = AED$.

COROLLARIUM.

275. Hinc ſi auferatur dimidium BE a media harmonica CB, erunt geometrice proportionales tres rectae AE, CE, DE, & CE ſemiſſis mediae harmonicae erit media geometrica inter duas AE, DE.

PROPOSITIO CIII.

276. *In triangulo* obtuſangulo ACH ducta normali AD ad latus HC productum, erit AHq ad $ACq + CHq + 2HCD$ in ratione aequalitatis (*fig.* 63.)

Cum enim ſit $DHq = DCq + CHq + 2HCD$, poſito communi ADq, erit $DHq + ADq$, ſive $AHq = DCq + ADq$ ſcilicet $= ACq + CHq + 2HCD$.

PROPOSITIO CIV.

277. In triangulo acutangulo CBA ducta normali AD, erit ACq ad $CBq + ABq - 2CBD$ in ratione aequalitatis.

Nam cum ſit $CBq + BDq = DCq + 2CBD$, addito communi ADq, erit $CBq + BDq + ADq$, ſive $CBq +$ ABq

$ABq = DCq + ADq + 2CBD$, nempe $ACq + 2CBD$, proindeque $ACq = CBq + ABq - 2CBD$.

COROLLARIUM.

178. Hinc eruitur ratio, qua datis tribus lateribus trianguli inveniri poſſit normalis ab uno angulorum in latus majus demiſſa, quae quidem facile determinabitur invento prius puncto D tali pacto. Eſt $ABq = ACq + CBq - 2BCD$, ergo $ACq + CBq - ABq = 2BCD$, unde $\frac{ACq + CBq - ABq}{2BC} = CDq$, & $ACq - CDq = ADq$.

PROPOSITIO CV.

279. Si in triangulo BAC ducatur recta AO ex vertice ad dimidium baſeos BC, erit $ABq + ACq$ ad $2AOq + BOq + OCq$ in ratione aequalitatis (*fig. 64.*)

Si AO fuerit baſi perpendicularis patet fore $ABq = AOq + OBq$, & $ACq = AOq + OCq$, ſive OBq, adeoque $ABq + ACq = 2AOq + OBq + OCq$, ſive $2AOq + 2OBq$. Quod ſi fuerit AO baſi BC obliqua, ductis in ipſam ex B, & C normalibus BF, CG, erit $ACq = COq + AOq - 2AOG$, & $ABq = BOq + AOq + 2AOF$. Cum autem ſit $OC = OB$, & $OG = OF$, erit rectangulum $AOG = AOF$, unde $ACq + ABq = 2AOq + OCq + OBq$.

COROLLARIA.

280. Hinc in omni parallelogrammo quadrata diametrorum ſunt ad quadrata laterum in ratione aequalitatis (*fig. 65.*) Nam $ABq + BCq = 2BEq + 2AEq$; Eſt enim AC ſecta bi-

bifariam in E a diametro BD, quae viciſſim bifariatur a diametro AC in eodem puncto E. Item $ADq + DCq = 2EDq$, ſive $2BEq + 2AEq$, ergo $ABq + BCq + ADq + DCq = 4BEq + 4AEq$ ſed $BDq = 4BEq$, & $ACq = 4AEq$, ergo liquet propoſitum.

Hinc ſi luxatis angulis, & eadem manente laterum magnitudine parallelogrammum ABCD in aliud FGIK diſtrahatur (*fig.* 66.) quadrata priorum diametrorum AC, BD aequabuntur quadratis poſteriorum FI, GK, utpote quadratis laterum, quae eadem manere ſupponuntur, ſemper aequalia.

PROPOSITIO CVI.

282. In quadrilateris circulo inſcriptis rectangulum ex diagoniis AE, DB eſt ad rectangulum ex lateribus oppoſitis, nempe $AD \times BE + AB \times DE$ in ratione aequalitatis (*fig.* 14.)

Ducatur ex puncto E recta EH conveniens cum DB in H ita tamen ut ſiat angulus $DEH = AEB$, erit ergo angulus $DHC = ABE$, proindeque angulus $EHB = EDA$, & eſt angulus $HBE = DAE$, quare $EB : BH = EA : AD$, hinc $EB \times AD = BH \times EA$. Item $ED : DH = EA : AB$, ergo etiam $ED \times AB = DH \times EA$, itaque $EB \times AD + ED \times AB = DB \times EA$.

PROPOSITIO CVII.

283. In ſemicirculo AFE, ſi ex centro C ducta ad quodvis punctum peripheriae recta CF, &, reſectis aequalibus CB, CD ducantur ex punctis B, D rectae BF, DF erit $BFq + DFq$ ad $EBq + BAq$ in ratione aequalitatis. (*fig.* 67.)

EA

Eſt enim $BEq + BAq = EAq - 2EBA = 4CAq - 2EBA$, & $EBA = CAq - CBq$ quare $BEq + BAq = 4CAq - 2CAq + 2CBq = 2CAq + 2CBq = 2CFq + 2CBq$. Sed eſt $2CFq + 2CBq = BFq + DFq$, ergo $BFq + DFq = EBq + BAq$.

COROLLARIA.

284. Hinc ex duobus punctis B, D a centro C in diametro aeque diſtantibus ductis rectis ad quodlibet circumferentiae punctum BF, DF, vel Bf, Df, erunt eorum laterum quadrata aequalia, quippe quae aequantur ipſi $EBq + BAq$, ſive $2CFq + 2CBq$.

285. Item ſi ex quolibet puncto G ad extrema cujuſvis diametri FH, fK ducantur rectae GF, GK, vel Gf, GH, priorum quadrata poſteriorum quadratis aequabuntur utpote dupla ſemper quadrati ejuſdem rectae CG cum quadrato radii CK, vel CF.

PROPOSITIO CVII.

286. Eſto triangulum DAB circulo inſcriptum, cujus diameter ACO, & ducta ſit ad baſim DB normalis AK, erit rectangulum laterum DAB ad rectangulum diametri cum dicta normali OAK in ratione aequalitatis (*fig.* 14.)

Nam juncta BO, erit triangulum OAB ſimile triangulo ADK, ob aequales angulos ad O, & D, nec non rectos AKD, ABO, quare DA : AK = OA : AB, & DAB = OAK.

PROPOSITIO CVIII.

287. In eodem, vel aequalibus circulis ſectores, nempe circuli partes duobus radiis & arcubus comprehenſae pro-

por-

portione reſpondent arcubus quibus inſiſtunt. Idem intellige de angulis ſive ad centrum, ſive ad circumferentiam (*fig.* 12.)

Concipiamus arcum AK in infinitum ſubdividi, & in arcu GL ſumantur tot arculi aequales arculis, in quos arcus AK dividitur, quot ſumi poſſunt, deinde ex centris C, *c* ad ſingula diviſionum puncta ducantur lineae rectae, patet quemlibet ſectorem indefinite parvum conſiderari, & haberi poſſe pro triangulo rectilineo, cujus altitudo eſt radius, baſis vero linea indefinite parva, & arcui indefinite proxima, quare ſector ACK aequabitur omnibus triangulis AC*a*, *a*C*b*, *b*CK &c. ſector vero G*c*L aequalis erit omnibus triangulis G*cd*, *dce ecf*, *fcL*, &c. & arcus AK aequabitur baſibus omnibus triangulorum AC*a*, *a*C*b*, *b*CK, &c. arcus vero GL aequalis erit baſibus triangulorum G*cd*, *dce*, &c. quare ſector ACK eſt ad ſectorem G*c*L, ut omnia triangula in quae ille reſolvitur, ad omnia triangulo in quae hic diſpeſcitur, ſcilicet ob aequalem omnium, altitudinem ut numerus baſium triangulorum in ſectore ACK ad numerum baſium in ſectore G*c*L; ſcilicet ut arcus AK ad arcum GL. Quoniam autem tot aequales angulos continet angulus ACK quot aequales arculos continet arcus AK, & tot aequales angulos G*c*L, quot aequales arculos arcus GL, erit arcus AK ad arcum GL ut angulus ACK ad angulum G*c*L. At vero anguli ad centrum dupli ſunt angulorum ad circumferentiam, quod de illis oſtenſum eſt de his pariter demonſtratur.

COROLLARIA.

288. Unde conſtat in eodem circulo eſſe arcum AK ad totam ſuam circumferentiam ut angulus ACK ad quatuor rectos.

289. Hinc arcus circulorum inaequalium, qui aequales angulos ad centra, vel ad peripherias ſubtendunt, ſunt ſimi-

ſimiles, ſcilicet eandem habent rationem ad integras circumferentias, & contra; Eſt enim arcus *mn* ad totam circumferentiam ſuam, ut angulus *mCn*, vel BCD ad quatuor rectos, & arcus BD ad integram circumferentiam ut idem angulus BCD ad quatuor rectos, quare arcus *mn* ad totam ſuam circumferentiam ut arcus BD ad ſuam.

PROPOSITIO CIX.

190. Similes arcus DE, BC ſunt in ratione radiorum AE, AC (*fig.* 68.)

Si negas, ſit DE : BC in maiore ratione quam AE : AC, & ſit ratio AE : AF. Deſcribatur arcus FG, ductaque tangente FH ex centro A agatur recta AH, ipſique FH ducatur ex puncto L parallela LK, & ex puncto E parallela EM. Cum ſit ergo DE : BC ut quaelibet portio NE ad ſimilem portionem LC, erit etiam NE : LC = AE : AF = EM : FH, ergo NE : EM = LC : FH; Sed prima ratio eſt minor ſecunda, ergo & tertia minor eſt quarta, quod eſt abſurdum; eſt enim LC > LK, quae eſt > FH, ac proinde LC multo major ipſa FH; ergo DE : BC non poteſt rationem habere majorem quam AE : AC; ſed neque minorem. Sit namque DE : BC = AE : A*e*, ductaque tangente CQ, cum qua conveniat in Q recta quae ducitur a vertice antequam feriat arcum radio A*e* deſcriptum, ducantur rectae PR, NO eidem tangenti parallelae. Erit ergo arcus NE : LC = AE : A*e* = AN : AP = NO : PR, & NE : NO = LC : PR. Sed eſt NE > NO, erit ergo LC > PR, ac proinde multo major ipſa CQ, quod eſt abſurdum.

COROLLARIA.

291. Quoniam vero arcus ſimiles ſunt ut integrae circumferentiae, hae quoque erunt in ratione radiorum ſuorum.

292. Praeterea cum circuli ſpectari poſſint ut polygona ſimilia ex lateribus rectis numero infinitis, & infinite parvis conſtituta, peripheriae quoque polygonorum erunt inter ſe ut radii circulorum, quibus inſcribuntur, vel ut normales a centro ad latera ductae.

SCHOLION I.

293. Animadvertatur hic velim quod cum dicimus circulum adſumi ut polygonum ex lateribus numero infinitis, & infinite parvis conſtitutum, ſcilicet peripheriam circuli componi ex lineolis rectis numero infinitis, & infinite parvis, hoc intelligendum ſit non quidem abſoluto, ſed figurato quodam ſenſu. Secus enim cum latera numero realiter infinita certis quibusdam limitibus, iiſque peranguſtis circumſcribantur, admittenda forent infinite minima realia, quae concipi quidem a nobis poſſunt, realiter vero exiſtere non poſſunt.

SCHOLION II.

294. Nunc vero, ut anguli ſemirecti triſectio ſuis numeris abſolvi poſſit, demonſtrandum nobis eſt quomodo dato quadrato BADC (*fig.* 102.) inclinanda ſit ex puncto B recta BGE, ut ſit GE aequalis datae BH; quod me facturum in Scholio prop. 24. Cap. 3. 1. Sect. ſpoponderam. Ponatur itaque CF = CH, & ſuper BF fiat ſemi-

ſemicircu'us ſecans productam AD in E, & jungatur BE, dico factum. Nam demiſſa normali EI, & juncta EF, erit BFq, ſive $BCq + CFq + 2BCF$, hoc eſt $BCq + CHq + 2BCF$, ſive $2BCq + BHq + 2BCF$, vel $BHq + 2FBC$, vel $BHq + 2EBG$, nempe $BHq + 2BGq + 2BGE = BEq + FEq = BGq + 2BGE + GEq + EFq = 2BGq + 2BGE + GEq$, ob $EF = BG$, ergo $2BGq + 2BGE + GEq = BHq + 2BGq + 2BGE$, ſeu $GEq = BHq$, & $GE = BH$.

CAPUT II.

De Inſcriptione, & Circumſcriptione figurarum regularium in circulo.

PROPOSITIO CX.

295. Datae cuilibet figurae regulari, aequilaterae ſcilicet, & aequiangulae circulum circumſcribere, ut nempe ſingulos angulorum vertices tangat. (*fig.* 69.)

Dividantur bifariam aequales anguli figurae per rectas CA, CB, CD, CE, CF, CG, &c. ſecabunt ſe mutuo rectae illae in puncto C, eruntque inter ſe aequales. Cum enim rectae AC, GC conveniant in puncto aliquo C, efficient triangulum ACG, eademque ratione rectae GC, FC aliud triangulum GCF conſtituent. Sed triangula illa aequantur inter ſe; Nam cum anguli figurae regularis ſint inter ſe aequales, & ſecti ſint bifariam, aequales erunt anguli CAG, CGA, nec non anguli CGF, CFG; aequantur praeterea inter ſe latera AG, GF, quare triangula ACG, GCF iſoſcelia ſunt, & aequalia, unde

 AC =

AC = FC = CG , & ob commune latus CG punctum interſectionis C rectarum AC , GC cadet in puncto interſectionis C rectarum GC , FC ; idem eodem plane modo oſtenditur de aliis rectis EC, DC &c. unde punctum C eſt centrum circuli quaeſitum.

COROLLARIA.

296. Unde conſtat radiis a centro figurae regularis ad vertices angulorum ductis figuram dividi in tot triangula iſoſcelia , & aequalia , quot ſunt figurae latera , & latus quodlibet figurae eſſe chordam arcus, qui aequatur quoto ex 360. gradibus per numerum laterum diviſis. Ita latus trianguli aequilateri eſt chorda arcus 120. grad. Quadrati latus eſt chorda arcus 90. grad. Latus pentagoni eſt chorda arcus 72. grad. Latus hexagoni eſt chorda arcus 60. grad. Et ſic de ceteris.

297. Hinc patet latus hexagoni regularis circulo inſcripti aequari radio circuli. Si enim ex centro C ducantur rectae ad ſingulos hexagoni angulos , dividetur in ſex triangula aequilatera , ob radios CA , CG aequales , & angulum ACG = 60. grad.; ergo reliqui anguli aequantur 120. grad. Eſt autem angulus CAG = CGA , quare ipſorum quilibet eſt = 60. grad. ; unde CA = AG.

SCHOLION.

298. Hic vero ut nonnulla dicamus de menſura angulorum in figuris regularibus , ajo quod ſi propoſita fuerit figura regularis , angulus ejusdem aequatur differentiae inter duos rectos , & angulum ad centrum. Cum enim in triangulis iſoſcelibus aequalibus GCF , FCE aequentur anguli CFG , CEF , patet angulum GFE figurae aequari ſum-

ſummae angulorum CEF, CFE trianguli CEF. Quoniam vero anguli omnes trianguli ſunt duobus rectis aequales, angulus GFE figurae aequalis erit differentiae inter duos rectos, & angulum ECF ad centrum. Hinc ſi n exprimat numerum laterum figurae regularis, $\frac{360}{n}$ exprimet angulum ad centrum ejusdem figurae, & $180 - \frac{360}{n}$, ſive ipſi aequale $180 \left(\frac{n-2}{n}\right)$ exprimet angulum figurae, adeoque.

Nomina	Latera	Ang. ad centrum	Ang. Figurae
Triangulum	3	120	60
Quadratum	4	90	90
Pentagonum	5	72	108
Hexagonum	6	60	120
Eptagonum	7	51. 25′	128. 35′
Octogonum	8	45	135
Enneagonum	9	40	140
Decagonum	10	36	144
Hendecagonum	11	32. 44	147. 16
Dodecagonum	12	30	150

PROPOSITIO CXI.

299. Cuilibet datae figurae regulari circulum inſcribere qui nempe ſingula tangat polygoni latera.

Cum latera figurae regularis circulo inſcriptae totidem ſint chordae aequales, chordae illae a centro aequaliter diſtabunt. Hinc ſi ex centro C demittantur normales CI, CH, hujuſmodi normales bifariam ſecabunt chordas AG, GF, eruntque inter ſe aequales, ac proinde

per

per omnia normalium extrema circulus deſcribi poterit, qui ſingula figurae latera tanget in puncto medio.

PROPOSITIO CXII.

300. Figuram regularem dato circulo circumſcribere.

Dividantur 360. gradus per duplum numerum laterum figurae, ſumtoque arcu KH, qui ſit quoto aequalis, per extrema K, H ducantur radii CK, CH, & producatur indefinite recta CK, deinde ex puncto H agatur recta FHG ipſi CH perpendicularis, quae occurret indeterminatae CG in puncto G, & fiat HF = HG, erit GF latus figurae quaeſitae. Eadem prorſus ratione inveniuntur alia figurae latera.

PROPOSITIO CXIII.

301. Circulo dato figuram regularem inſcribere.

Numerus 360. grad. dividatur per numerum laterum figurae quaeſitae, & in dato circulo adſumatur arcus huic quoto aequalis, erit chorda hujuſce arcus figurae quaeſitae latus, quare ſi chorda illa per totam circumferentiam transferatur, habebitur figura quaeſita.

PROPOSITIO CXIV.

302. Super data recta GF quodlibet polygonum regulare deſcribere (*fig.* 69. 70.)

Intelligatur polygonum regulare circulo inſcriptum quod ſimile ſit polygono quaeſito, & ex centro circuli C ducantur radii CO, C*f* ad angulos polygoni inſcripti, mox ſuper data GF conſtruatur triangulum aequicrure GCF ſimile triangulo aequicruri OC*f*; & facto centro in

C radiis

C radiis CG, CF deſcribatur circulus GFEDBA, in quo cum ſit angulus GCF = OCf, erit & arcus GF ſimile arcui Of, quare polygonum, quod deſcribitur adplicata GF intra circulum GFEDBA, erit ſimile polygono OfDMNA.

SCHOLION I.

303. *Euclides* elementorum ſuorum lib. 4. figuras regulares circulo inſcribere, & circumſcribere docet, at nonnullas tantum attingit. Nemo enim figuras laterum 7. 9, 11, &c. geometrice deſcribere hactenus docuit. Cum vero earundem deſcriptio pro Architectura militari tantum neceſſaria videatur, ad quam deſcriptio figurarum practica, ſive mechanica longe utilior, quam geometrica, hinc factum eſt ut parum utile duxerim univerſam ejusdem libri doctrinam operoſius demonſtrare. Illud vero hoc loco minime praetermittendum eſt Cl. *Rinaldinum* regulam propoſuiſſe cujus ope quaelibet figura regularis dato circulo inſcribi poſſit. Sed quando, ut eſt hominum conditio, Vir doctiſſimus in hac regula ſtabilienda lapſus eſt, non abs re erit eandem hic breviter ad examen revocare. Regula eſt ejuſmodi. *Super diametro AD dati circuli (fig. 70.) facto triangulo aequilatero ALD, ſectaque AD in quotlibet partes juxta datum quemlibet numerum n, quarum partium duae reliquantur in* $DH = \frac{2}{n}$ *ipſius AD, ſi ducta LH producatur uſque ad circumferentiam occurret arcui in f, ut ſit Df pars circamferenriae a numero n denominata, recta vero ſubtenſa Df latus figurae ab n deſignatae.* Sit itaque $DC = \frac{2}{4}$, ſeu $\frac{1}{2}$ AD, erit, juncta LCG, DG quadrans circuli. Si DH ſint $\frac{2}{6}$ aut $\frac{2}{3}$ AD, erit Df per ipſam LHf deter-

determinata latus hexagonis, aut trigoni aequilateri. Et quidem quoad primum ſecetur diameter AD in 4 partes aequales initio ſumto a puncto D, patet in recta DC duas ex iisdem partibus contineri; producatur deinde recta LC donec occurrat peripheriae in puncto G, manifeſtum eſt rectam GD eſſe latus quadrati inſcripti, quippe ſingula latera trianguli LCA aequantur ſingulis lateribus trianguli LCD, ergo eadem triangula ſunt aequiangula, unde angulus ACL = LCD, ac proinde uterque rectus; Rectae igitur AD, LG rectum angulum in centro conſtituentes, circulum in 4 partes aequales ſecabunt, proindeque ſi puncta interſectionis earundem cum peripheria circuli rectis lineis connectantur, conſtituent quadratum AGDV.

Quoad ſecundum dividatur diameter AD in ſex partes aequales ita ut DH ſint duae diviſionis partes, & ex puncto L per H ducatur recta LH, quae producta occurrat peripheriae circuli in f, ſi jungatur fD, erit haec latus hexagoni, ſive circuli radius. Et quidem ponatur fD vere eſſe latus hexagoni, & ducatur recta fL diametrum ſecans in puncto H, patet DH debere eſſe tertiam diametri partem. Id autem verum eſſe ſic probatur; Jungatur Cf. Et quoniam triangulum DCf eſt aequilaterum, erit & aequiangulum. quare angulus HDf = HAL, hinc triangula LAH, fDH ſunt ſimilia, unde AL : fD = AH : HD. Sed AL eſt dupla ipſius fD, ergo & AH eſt dupla ipſius HD, proindeque AD tripla ipſius HD.

Quod vero ſpectat ad tertium, ſive ad inſcriptionem trianguli regularis, dividatur diameter AD in tres aequales partes ita ut AQ ſit tertia pars diametri, & QD duas comprehendat diviſionis partes; ducatur deinde LQ, & producatur donec peripheriae circuli occurrat in O, juncta OD erit latus trianguli aequilateri circulo inſcripti.

pti. Et quidem eſto OD latus hujuſmodi trianguli, & ſuper AD conſtruatur triangulum aequilaterum ADL, & ducatur OL diametrum ſecans in Q, demonſtrandum eſt AQ eſſe tertiam partem ipſius AD, vel CQ tertiam partem radii; Quoniam enim angulus ACO eſt 60. grad. erit angulus ADO 30. grad. Sed angulus ADL eſt 60. grad. ergo angulus LDO erit 90. grad. nempe rectus: Iam vero ducta recta OM erit diameter circuli; quippe angulus ODM cum ſit rectus, eſt in ſemicirculo, ac proinde recta OM tranſit per circuli centrum C. Ducantur itaque NM, & LC. Et quoniam recta OD ſubtendit arcum trientis, & OM dimidium circumferentiae circuli, ipſa DM ſubtendet arcum ſextantis, nempe aequalis erit radio, adeoque & NM. Quoniam igitur AD dupla eſt ipſius NM, adeoque & LC ipſius LS, erit ob ſimilia triangula LSR, LCQ, QC dupla ipſius RS, & ob triangula itidem ſimilia OQC, ORM, erit eadem QC ſemiſſis ipſius RM; aequantur ergo dupla ipſius RS, & dimidia ipſius RM, vel ipſa RM eſt quadrupla ipſius RS; Itaque SM eſt tripla ipſius RS; Eſt autem LM : QC = SM : RS, cum illae ſint harum duplae, ergo LM, vel radius eſt triplus ipſius QC.

Nunc vero ſi ponatur DH $= \frac{2}{8}$ ſive $\frac{1}{4}$ AD nullo modo poterit juncta LH occurrere arcui in f ad arcum Df $= \frac{1}{8}$ circumferentiae. Ponatur enim DF vere $= \frac{1}{8}$ circumferentiae, & jungatur FH, haec producta conveniet cum LG in puncto I infra punctum L. Ductis enim ad utramque diametrum normalibus FE, FK, fiet CKFE quadratum $= \frac{1}{2}$ quadrati CD, unde CE erit media inter

totam CD, ejuſque $\frac{1}{2}$ CH, quare DE : EH = EC : CH ſed EH : EF = CH : CI, ergo ex aequo DE : EF = EC : CI; itaque DE $\times$ CI = EF $\times$ EC = FECK quadrato, cui etiam aequatur rectangulum AED, quocirca AE $\times$ ED = CI $\times$ ED; unde AE = CI. Jam vero duo ſimul quadrata AE, & ED dupla ſunt tum quadrati AC, tum quadrati CH (quod = $\frac{1}{2}$ AC, unde ejus duplum adhuc ſemel ipſum AC adaequat) hoc eſt aequantur triplo quadrati AC, ſive uni quadrato CL perpendicularis ad baſim trianguli aequilateri, ergo ſola AE, vel huic aequalis CI minor erit ipſa CL, deficit enim quadratum illius ab hujus quadrato per quadratum DE, itaque punctum I eſt infra L. Ergo regula *Rinaldini* locum habet tantummodo in triangulo aequilatero, in quadrato, & in hexagono, ac proinde non eſt univerſalis. Et quidem non deſunt rationes, quae plane evincant fieri nullo modo poſſe ut hujuſmodi regula generalis inveniatur; Regularis enim figurae deſcriptio non eſt problema unius ejuſdemque gradus pro figuris omnibus, ſed diverſi pro varietate figurarum. Et quidem conſtructio trianguli, tetragoni, pentagoni hexagoni, octogoni, &c. eſt problema planum, quod ope circini, & regulae conſtrui poteſt. At vero eptagoni conſtructio eſt altioris gradus, perficique non poteſt niſi ſectionum conicarum praeſidio. At ſi vera foret regula *Rinaldini* conſtructio eptagoni aliarumque figurarum eſſet problema planum; patet enim quod juxta hanc regulam conſtructio ipſa ſemper haberi poſſet per circinum, & regulam; quare non alienum eſt rationi exiſtimare ſucceſſum elegantem in nonnullis figuris ſimplicibus fontem fuiſſe erroris in quem lapſus eſt *Rinaldinus* ubi hanc regulam ſtabilivit. Exinde autem colligi poterit

in mate-

in mathematicis diſciplinis haud fidendum exemp'is & imperfectae inductioni, ut ſaepe fieri ſolet.

CAPUT III.

De Menſura ſuperficierum.

PROPOSITIO CXV.

304. Superficies parallelogrammi rectanguli aequalis eſt producto ex baſi in altitudinem (*fig.* 8.)

Eſto parallelogrammum rectangulum ABDC, cujus altitudo AC certum numerum pedum contineat, ex gr. 3, baſis vero AB 5 pedes habeat. Patet diviſum concipi poſſe parallelogrammum in tres ſuperficies aequales ut CE, quarum unaquaeque 5. minores ſuperficies quadratas contineat, ſive 5. pedes quadratos ut vocant. Habebitur itaque area totius parallelogrammi ſi tres pedes quadrati qui in prima ſuperficie continentur toties adſumantur, quot ſunt aequales ſuperficies ut CE; quare tota ſuperficies, vel area parallelogrammi erit $= 3 \times 5 = 15$ pedibus quadratis; Quod ſi quilibet alter partium numerus fingatur, erit eadem demonſtratio etiamſi altitudo, & baſis parallelogrammi ponantur incommenſurabiles.

COROLLARIA.

305. Quoniam vero triangulum ſemiſſis eſt parallelogrammi, habebitur ſuperficies trianguli rectanguli, ſi dimidium productum ex altitudine in baſim accipiatur.

 306. Qui-

Digitized by Google

306. Quinimmo cum triangula ſuper eadem baſi, & in iisdem parallelis conſtituta ſint inter ſe aequalia, trianguli cujuslibet ſuperficies aequalis erit dimidio producto ex baſi in altitudinem.

307. Cum autem & parallelogramma in eadem baſi & in iisdem parallelis conſtituta aequentur inter ſe, ſuperficies quoque cujuslibet parallalelogrammi aequalis erit producto ex baſi in altitudinem.

PROPOSITIO CXVI.

308. Superficies polygoni regularis aequatur dimidio producto ex perpendiculari a centro polygoni in unum latus demiſſa in polygoni ipſius circumferentiam (*fig.* 69.)

Enim vero triangula omnia, in quae polygonum regulare reſolvitur, ſunt inter ſe aequalia, eandemque proinde habent altitudinem CI. Sed ſuperficies polygoni regularis eſt $= CI \times \frac{1}{2} AG + CI \times \frac{1}{2} GF + CI \times \frac{1}{2} FE + CI \times \frac{1}{2} ED$ &c. quare cum $AG + GF + FE + ED$ &c. ſit tota polygoni circumferentia, patet aream ejusdem poligoni aequari producto ex altitndine CI in dimidiam poligoni circumferentiam, ſive dimidio producto ex circumferentia polygoni in altitudinem.

PROPOSITIO CXVII.

309. Circulus KSMN aequatur triangulo rectangulo CKR ex radio CK & recta KR aequali toti circumferentiae KMSN (*fig.* 10.)

Patet hoc ex praecedente propoſitione ſi circulus adſumatur ut polygonum ex lateribus numero infinitis, & infini-

infinite parvis conſtitutum. Verum aliter ſic oſtendi poteſt. Ducatur per quodlibet punctum T radii CK recta TX lateri, vel tangenti KR parallela, & per idem punctum T deſcribatur circumferentia TDGB, erit in triangulis KCR, TCX, KR : TX = KC : CT, vel ut peripheria KMSN ad peripheriam TDGB. Sed eſt KA = KMSN, erit ergo & TX = TDGB, atque ita ſemper, ergo omnes ſimul tangentes ad omnes ſimul reſpectivas circumferentias, ſcilicet triangulum ex tangentibus parallelis ad circulum ex concentricis peripheriis compoſitum eſt ut prior tangens ad priorem peripheriam, nempe in ratione aequalitatis.

COROLLARIA.

310. Hinc quilibet ſector TCS aequalis erit triangulo KCQ ex radio CK, & recta KQ, quae ſit aequalis arcui KMS ejusdem ſectoris. Cum enim ſit circulus ad ſectorem TCS ut tota peripheria ad arcum KMS, ſive ut KR : KQ, vel ut triangulum KCR ad triangulum KCQ; cumque ſit circulus aequalis triangulo KCR, erit proinde ſector aequalis triangulo KCQ.

311. Circuli KMSN, TGB ſunt in duplicata ratione radiorum CK, CT, vel ut horum quadrata. Cum enim ſit peripheria KMSN ad radium CK ut peripheria TGB ad radium CT, erit in triangulis RKC, XTC, RK : KC = XT : TC; quare triangula erunt ſimilia ac proinde in duplicata ratione laterum homologorum CK, CT; quare erunt & circuli in eadem ratione, in qua pariter erunt & ſectores.

312. Quilibet ſector FDC ad ſectorem ABC eſt in ratione compoſita ex ratione arcus FD ad arcum AB, & radio DC : CB (*fig.* 71.) Producta namque AC in E erit ſector FDC ad ſectorem ABC in ratione compoſita ſecto-

ris FDC

ris FDC ad ſectorem EDC, & hujus ad ſectorem ABC. Sed ſector FDC ad ſectorem EDC eſt ut arcus FD: DE, & ſector EDC ad ſectorem ABC eſt ut EDq: ABq, ſive ut ED: AB cum ED: AB, quare ſector FDC ad ſectorem ABC rationem habet compoſitam ex FD: DE, ex DE: AB, & DE: AB, ſive FD: AB, & ED: AB, vel DC: BC.

PROPOSITIO CXVIII.

513. In ſemicirculo ABD ductis quoquomodo rectis AB, BD, & in ipſis etiam deſcriptis ſemicirculis AEB, BFD erunt lunulae AEBGA, BFDHB ſimul aequales triangulo ABD (*fig.* 72.).

Cum enim ob angulum rectum ABD ſit $ADq = ABq + BDq$, ut & ſemicirculus AGBHD = AEB + BFD, ab latis portionibus AGB, BHD fiet triangulum ABD aequale binis lunulis AEBDA, BFDHB, quae ſi fuerint quadrantales ipſarum quaelibet aequalis erit dimidio ejuſdem trianguli ABD.

SCHOLION I.

514. *Johannes Baptiſta Porta* contendit, nulla tamen adlata demonſtratione lunulam AEBGA eſſe ad lunulam BFCHB ut AB: BD, ſive, bifariam diviſo recto angulo ABD per rectam BT, ut AT: TD, adeoque lunulam AEBGA aequari triangulo ABT, lunulam vero BFDHB triangulo TBD. Recentiſſimus autem Geometra arbitratur lunulam AEBGA eſſe ad lunulam BFDHB, ut eſt arcus AGB ad arcum BHD, proindeque diviſa AD in R, ut ſit AR:RD = AGB:BHD, triangulum ABR aequari lunulae AEBGA, triangulum vero RBD lunulae BFDHB. Quod autem ſit lunula AEBGA ad lunulam BFDHB ut AGB: BHD ſic oſtendit. Diviſis bifa-

riam

riam ſubtenſis AB, BD in punctis I, K, ductiſque ex centro circuli C rectis CIE, CKF, cum ſit CK + KB = CI + IB, & CK + KB = CF, & CI + IB = CE erit CF = CE, proindeque GE = HF; Deſcripta igitur ex eodem centro C circuli circumferentia LMNP, ait eſſe AGB: LQM = BHD: NOP, & permutando AGB: BHD = LQM: NOP, atque ita ſemper ſcilicet lunulam AEBGA ad lunulam BFDHB eſſe ut AGB: BHD. Sed cum nec demonſtraverit, nec demonſtrari fortaſſe poſſit, quod ſit AGB: LQM = BHD: NOP, patet propoſitum theorema nullo modo verificari,

SCHOLION II.

315. Obſervaſſe autem hic juverit, quod ſi verum eſſet triangulum ARB aequari lunulae AEBGA, inventa foret circuli quadratura. Nam ſecta diametro AD in R, ut ſit AR: RD = AGB: BHD, recta BR divideret utique ABD in triangula ABR = AEBGA, & BRD = BFDHB; hinc in ſemicirculo AFGD (*fig.* 74.) ter poſita ſemidiametro AF, FG, GD, quae eſt latus hexagoni, & ſuper diametris AF, FG, GD deſcriptis ſemicirculis AEF, FQG, GOD, nec non ſemicirculo CVD, patet quod cum quadratum ex AD ſit quadruplum quadrati ex AC, ſive aequale quatuor quadratis ex AF, FG, GD, & DC, ſemicirculus AFGD aequaretur quatuor ſemicirculis AEF, FQG, GOD, DVC; juncta igitur FC, ſumtaque $AR = \frac{1}{3}$ ipſius AD, ut eſt

$ASF = \frac{1}{3}$ ſemicirculi AFGD, & ducta FR eſſet ASFR = AEF, itemque accepta DH = AR, ductaque GH, foret adhuc HGND = GOD, ducto vero radio FC, factaque FP = AR, junctaque GP, eſſet FXGP; ſive, ducta PK parallela diametro, & juncta GK, fieret FXGK = FQG, quare GKRHG aequaretur ſemicirculo CVD; qui proinde quadrari poſſet.

PRO-

PROPOSITIO CXIX.

316. Circulus ASDE eſt ad Zonam inſcriptam ut quadratum radii CE ad rectangulum SIE, & circulus NOMI eſt ad eandem Zonam ut quadratum radii CI ad idem rectangulum SIE (*fig.* 73.)

Circulus ASDE aequatur circulo NOMI ſimul & Zonae; & eſt CEq = SIE + CIq, ergo cum ſit circulus ASDE ad circulum NOMI ut CEq: CIq, erit per converſionem rationis circulus ASDE ad Zonam ut CEq: SIE, vel dividendo erit Zona ad circulum NOMI ut SIE: CIq, & invertendo circulus ad Zonam ut quadratum ad rectangulum.

COROLLARIA.

317. Hinc quilibet circulus TYXZ ad quamlibet Zonam DEASMINO eſt ut quadratum radii VX ad rectangulum SIE. Eſt enim circulus TYXZ ad circulum ASDE ut VXq: CEq, & circulus ASDE ad Zonam inſcriptam ut CEq: SIE, ergo ex aequo ordinate circulus TYSR erit ad Zonam ut VXq: SIE.

318. Ergo deſcribi poterit circulus aequalis datae Zonae DEASMINO ſi inventa media proportionali inter SI, IE, quae ſit GR, ab ipſa tanquam radio deſcribatur circulus qui Zonam adaequabit.

PROPOSITIO CXX.

319. *Datum circulum in quotvis aequales partes ope circulorum concentricorum ſecare* (*fig.* 69.)

Eſto C centrum, & CE radius dati circuli. Dividenda autem ſit hujus circuli area in quatuor partes aequales ope trium circulorum concentricorum. Ponatur radius CE diviſus

diviſus in punctis Z, X V ita ut area circuli CZ, & areae Zonarum ZX, XV, VE ſint inter ſe aequales. Hoc poſito area circuli CZ erit $\frac{1}{4}$ dati circuli, circulus CX $\frac{2}{4}$, circulus AV $\frac{3}{4}$ ejusdem; area vero circuli CE erit ad aream circuli CZ, ut CEq: CZq, quare CEq: CZq = 4 : 1. Data eſt autem magnitudo CEq, ergo CZq & per conſequens ipſa radix CZ erit itidem data: quae quidem eſt radius circuli interioris. Item CEq: CXq = 4 : 2, ergo CX radius alterius circuli concentrici eſt pariter datus, & ſic de ceteris, unde conſtat propoſitum.

PROPOSITIO CXXI.

320. Datum circulum ABDE extrema ac media ratione ſecare, ut nempe ſit idem circulus ad Zonam ABDENM, ut haec ipſa Zona ad reliquum circulum NM (*fig.* 73.)

Deſcribatur diametro AC circulus AKCF, factaque AG = AC ducatur per centrum H recta GHF, & ex puncto C adplicetur ſupra tangentem AL recta CL = FG, quae ſecet circulum in B, erit ergo BC = KF, GK = LB, adeoque rectangulum CLB = FGK = AGq = ACq, unde LC: CA = CA, vel CB: LB, quare CL ſecta eſt extrema ac media ratione in puncto B, ex quo ſi ducatur BN normalis diametro AC ſecabitur haec ipſa diameter extrema ac media ratione in puncto N. Quod ſi centro C, & radio CN deſcribatur circulus NOM ſecabitur a recta CL in O, ad quod punctum ſi ducatur recta AO, erit haec perpendicularis ipſi CL, unde ACq = LCO = CLB, hinc LB = OC & LO = CB, & ALq = CLO, unde CL : CA = LA : LO = LA : AC, adeoque & CB : BN = BN : NC, ob ſimilitudinem triangulorum; ſed circulus BN aequatur Zonae ABDENM, ergo circulus radii AC ad eamdem Zonam eſt ut ipſa Zona ad circulum radii NC.

LEMMA I.

311. Datis chorda RO, & radio CR invenire chordam arcus dimidii RN (*fig.* 3.)

Ex CR*q* ſubtrahatur RG*q*, remanebit GC*q*, ex quo ſi quadrata radix extrahatur, habebitur GC, quae ſubtracta ex radio CN relinquet NG. Addantur ſimul RG*q*, & NG*q* exſurget RN*q*, ex quo ſi extrahatur radix quadrata, habebitur chorda arcus dimidii RN.

LEMMA II.

312. Dato latere polygoni regularis inſcripti RO, invenire latus circumſcripti LK.

Quoniam LK eſt parallela ipſi RO, & CN biſariam ſecat arcum RO, erit $OG = \frac{1}{2} OR$, & $CG : GO = CN : NK$; innoteſcet ergo ipſa NK, cujus duplum eſt latus polygoni circumſcripti LK.

PROPOSITIO CXXII.

313. Invenire rationem diametri ad circumferentiam.

Inveniantur per continuam arcuum biſectionem latera polygoni inſcripti, donec ad latus deveniatur, quod ſubtendat arcum quamtumlibet exiguum. Hoc invento latere inveſtigetur latus polygoni ſimilis circumſcripti; ac deinde multiplicetur utrumque per numerum laterum polygoni, ex qua quidem multiplicatione eruetur perimeter polygoni tam inſcripti, quam circumſcripti. Erit ratio diametri ad peripheriam circuli major quam ejusdem ad perimetrum polygoni circumſcripti, minor vero quam ejusdem ad perimetrum

inſcri-

inſcripti. Cognita vero inter utramque perimetrum differentia facile determinabitur ratio diametri ad peripheriam circuli in numeris prope veris; ſcilicet poſito circuli radio = 1, ratio prope vera diametri ad peripheriam erit ut 10000000000000000 : 3. 14159265358979321.

SCHOLION I.

324. Mirum eſt quam acri contentione Geometrarum in dimenſione circuli inveſtiganda ſeculis omnibus laboratum ſit. *Archimedes* excogitavit methodum quadrandi circulum per polygona regularia inſcripta, & circumſcripta, & polygonis 96. laterum uſus invenit rationem diametri ad peripheriam eſſe ut 7 : 22. quam proxime. Ejusdem veſtigiis inhaerentes poſteri rationes proximiores inveſtigarunt. Et ſane *Ludovicus Colonienſis* invenit, quod, ſumta unitate pro diametro, circumferentia debet eſſe major quam 3. 14159265358979323846264338387950. ſed minor quam foret hic idem numerus mutata poſtrema cyphra o in unitatem. *Metius* rationem diametri ad circumferentiam ſe ſe habere comperiit, ut 113 : 355, quam ſane rationem aliis praeferendam eſſe ducimus, cum inter omnes parvis numeris conſtantes nulla hactenus inventa ſit verae propinquior Licet enim circumferentiam faciat juſta majorem non tamen excedit veram in tribus partibus ex 10000, in quot diameter ſecta concipitur.

COROLLARIUM.

325. Unde facile erit ex data circuli diametro circumferentiam, & ex data circumferentia diametrum inveſtigare, ſi nempe inveniatur quarta proportionalis in primo caſu ad 113; 355, & datam diametrum, in ſecundo ad 355; 113, & datam circumferentiam.

SCHOLION.

316. Praeter *Archimedem*, *Ludovicum Ceulen*, *Snellium*; & *Metium* in dimenſione circuli deſudarunt *Antiphon*, *Byſon*, *Hippocrates*, *Ptolemeus*, *Orontius*, nonnulli *Arabes*, *Campanus*, *Cuſanus*, *Fortius*, & *Bovillius*, quorum methodos ad examen revocare inſtituti noſtri ratio non patitur. Conſuli tamen poteſt *Buteonis* opuſculum de quadratura circuli, ubi multorum quadraturae confutantur, & ab omnium impugnatione defenditur *Archimedes*.

PROPOSITIO CXXIII.

327. Circulus quilibet ad quadratum ſuae diametri eam rationem habet quam 11 : 14 quamproxime (*fig.* 75.)

Eſto circulus ABCD, & quadratum diametri BD circulo circumſcriptum EGHI, producto latere EG ſumatur EK ipſius EG tripla, & KF ſeptima pars diametri BD, vel lateris EG, & jungantur BG, BF. Quoniam igitur EF : EG = 22 : 7, erit EF circumferentiae circuli ferme aequalis. Cum ergo BE ſit aequalis ſemidiametro, erit triangulum BEF circulo aequale proxime, & triangulum BEG $= \frac{1}{4}$ EG*q*. Quia vero poſito latere EG = 7, eſt recta EF = 22, erit triangulum BEF, hoc eſt circulus ABCD ad triangulum BEG ut 22 : 7. Sed poſito triangulo BEG = 7, quadratum EGHI ipſius quadruplum eſt 28, ergo circulus ad quadratum eſt ferme ut 22 : 28, vel ut 11 : 14.

COROLLARIUM.

328. Hinc ſi data ſit circuli diameter, invenietur ipſius area, ſi fiat ut 14 : 11, ita quadratum diametri datae ad aream quaeſi-

quaeſitam, et ſi data ſit area, invenietur diameter, ſi fiat ut 11 : 14 ita area data ad quartum numerum, qui erit quadratum diametri, ejuſque radix erit ipſa diameter.

CAPUT IV.

De proprietatibus ſuperficierum ſe mutuo ſecantium nec non linearum ſuperficiebus ipſis occurrentium.

PROPOSITIO CXXIV.

319. Superficies ejusdem trianguli, vel quadrilateri tota eſt in eadem ſuperficie plana.

Si enim trianguli, vel quadrilateri pars aliqua in una foret ſuperficie, altera vero pars in alia foret diverſa ſuperficie, ejusdem linae rectae partes non eſſent in una eademque ſuperficie, quod eſt abſurdum.

PROPOSITIO CXXV.

330. Communis duarum ſuperficierum ſectio eſt linea recta.

Siquidem duarum ſuperficierum interſectio eſt linea, cujus ſingula puncta in utraque jacent ſuperficie. Evidens autem eſt tria puncta duabus ſuperficiebus communia eſſe non poſſe niſi in directum jaceant. Cum enim tria puncta non jacentia in eadem recta ſuperficiei poſitionem determinent, ut patet, ſi tria puncta in directum non poſita duabus ſuperficiebus communia eſſe poſſent, tria puncta ſuperficiei poſitionem non determinarent, unde duarum ſuperficierum interſectio eſt linea recta.

PROPOSITIO CXXVI.

331. Si duae rectae ad eandem ſuperficiem normaliter vel aequaliter ad eandem plagam inclinentur, ſunt inter ſi parallelae & contra.

Si enim rectarum illarum extrema communi recta in ſuperficie jungantur, duae illae rectae ad ſuperficiem normales vel aequaliter verſus eandem plagam inclinatae erunt pariter normales, vel ad eandem plagam aequaliter inclinatae in rectam ipſas conjungentem; eſt enim in eadem ſuperficie, Proindeque rectae illae erunt inter ſe parallelae & contra.

PROPOSITIO CXXVII.

332. Si duae ſuperficies ſibi mutuo inclinentur, easdem habent proprietates, quas rectae ad ſe invicem inclinatae (*fig.* 76.).

Et quidem cum recta AB tota jaceat in ſuperficie plana AD, & recta EH tota jaceat in ſuperficie plana EG, manifeſtum eſt quae de lineis AB, EH ſe in puncto I mutuo ſecantibus oſtenduntur, de ſuperficiebus planis AD, EG ſe invicem ſecantibus in recta IK comprobari. Et quidem ſi ponamus aliquam ſuperficiem EG immobilem, in qua jaceat alia plana ſuperficies AD, hae duae ſuperficies utpote omni craſſitie deſtitutae in unam coaleſcent ſuperficiem. Jam vero ſi ſuperficiem planam AD revolvi intelligamus circa rectam IK fixam perpetuo manentem, patet I. ab ipſo motus initio nihil duabus ſuperficiebus planis commune eſſe praeter rectam IK, circa quam ſuperficies plana AD revolvitur, quae proinde eſt utriuſque plani interſectio. II. planam illam ſuperficiem ſingulos percurrere inclinationis gradus, ſi tandiu converti concipiamus, donec ad oppoſitam ſuperficiei EG partem perveniat

veniat. III. Superficiem revolventem ſuperficiei immotae perpendicularem fieri, ubi ad eum pervenerit ſitum, in quo non magis pendeat ex una parte quam ex alia IV. Singulos inclinationis gradus menſurari arcu circuli, cujus centrum perpetuo manebit in communi ſuperficierum interſectione. Quoniam vero centrum in ipſo circuli plano jacet, centrum hujuſce arcus ſit oportet in linea recta cujus revolutione ipſum arcus planum generatur. V. Centrum arcus in quo ſumuntur gradus inclinationis ſuperficiei unius ad aliam ſitum eſſe in perpendiculari, quae ducitur ex quolibet arcus puncto ad interſectionem ſuperficierum, quare ſi deſcribatur ſemicirculus, cujus centrum ſit in linea duabus ſuperficiebus communi, & cujus planum normale ſit ad ſuperficiem immotam, ope graduum hujuſce ſemicirculi inclinationes omnes ſuperficiei mobilis menſurari poterunt. Unde generatim binae ſuperficies planae ad ſe invicem inclinatae easdem habent proprietates, quae in mutuo linearum inclinatione demonſtrantur. Hinc.

COROLLARIA.

333. Si ſuperficies plana alteri ſuperficiei planae occurrat vel duos angulos rectos conſtituit, vel duobus rectis aequales.

334. In communi planarum ſuperficierum ſectione aequantur inter ſe anguli ad verticem oppoſiti.

335. Si quotlibet ſuperficies planae eandem habuerint communem interſectionem ſumma angulorum omnium circa eandem interſectionem eſt 360. grad.

336. Si plana ſuperficies duas alias vel etiam plures ſuperficies planas parallelas ſecuerit, efficiet angulos alternos inter ſe aequales, aequales itidem externos internis, & binos ad easdem partes internos duobus rectis aequales.

PRO-

PROPOSITIO CXXVIII.

337. Si duae vel plures etiam ſuperficies planae alia ſuperficie plana ſecentur, communes interſectiones erunt inter ſe parallelae.

Enim vero cum ſuperficies ipſae ſimul convenire non poſſint, nec ipſae communes ſectiones ſimul convenient; ſecus enim ſibi occurrerent ſuperficies ipſae, quod eſt contra hypotheſim; nam lineae ſecantes, ſeu communes interſectiones ſunt in iisdem planis ſuperficiebus.

PROPOSITIO CXXIX.

338. Si recta PC perpendicularis fuerit duabus rectis AB, DE in ſubiecta ſuperficie plana jacentibus, erit pariter perpendicularis ſingulis rectis, quae in eadem ſuperficie duci poſſunt, ac proinde ipſimet ſuperficiei (*fig.* 77.)

Fiat CD = CE, CA = CB, junctiſque AD, EB agatur per punctum C recta FCG, & ducantur PA, PF, PD, PE, PG, PB. Et quoniam eſt AC + CD = CB + CE, & anguli verticales ad punctum C ſunt inter ſe aequales, erit AD = EB &c. Praeterea cum ſit angulus ACF = BCG, & angulus DAC = EBC, & latus AC = CB erit FC = CG &c. Item quoniam AC + CP = BC + CP, & angulus ACP = BCP, erit AP = PB &c. Eadem ratione erit PD = PE. Quoniam vero PA + AF = GB + PB, & angulus PAF = PBG, erit PF = PG. Demum quoniam FC + CP = GC + CP, & PF = PG, erit angulus FCP = GCP, ac proinde uterque rectus. Hoc ipſum oſtenditur de aliis lineis, quae in eadem ſuperficie duci poſſunt, ergo patet propoſitum.

COROL-

COROLLARIA:

339. Quoniam angulus PCF eſt rectus, adeoque angulus PFC acutus, erit PC $<$ PF, & hoc ſemper, unde recta, quae ab adſumto extra planam ſuperficiem puncto cadit in ſuperficiem ipſam perpendicularis, eſt minima rectarum, quae ab eodem illo puncto cadunt in eandem ſuperficiem,

340. Ex puncto ſublimi P demitti poterit recta PC ſubiectae ſuperficiei planae perpendicularis ſi ducta in eadem ſuperficie qualibet recta AD agatur recta PF ipſi FD perpendicularis, & ex puncto F ductâ FC normali ad AD demittatur ex puncto P recta PC normalis ad eandem FC, quae erit ſubjectae ſuperficiei planae perpendicularis. Cum enim FD rectos angulos conſtituat cum ipſis PF, FC, normalis erit ſuperficiei PFC, & ducta CH ipſi AD parallela, erit pariter eidem ſuperficiei PFC perpendicularis, unde anguli PCH, PCF erunt recti, adeoque PC erit ſubiectae ſuperficiei FCH perpendicularis.

341. Poterit ergo ex puncto O in ſuperficie plana adſumto excitari normalis ad eandem, ſi ex puncto ſublimi P demiſſa ad planum normali PC, huic ex puncto O excitetur parallela OR, quae normalis erit datae ſuperficiei planae.

342. Ab uno eodemque puncto tum in ſuperficie plana accepto tum extra ipſam adſumto duci non poſſunt duae rectae eidem ſuperficiei perpendiculares. Cum enim hujuſmodi rectae eſſe debeant parallelae non poſſunt in aliquo puncto convenire,

SECTIO III.

DE GEOMETRIA SOLIDORUM.

CAPUT I.

De Geneſi, & proprietatibus ſolidorum.

PROPOSITIO CXXX.

343. Solidorum rectilineorum geneſim explicare (*fig.* 81.)
Si figura rectilinea ACB quotlibet laterum ſupra rectam immotam AD feratur motu ſibi ſemper paralielo, ſolidum ACBEFD inde genitum vocatur *priſma*, quod *rectum* dicitur, ſi recta AD fuerit deſcribenti plano perpendicularis, ſin minus, adpellatur *obliquum*. Si planum deſcribens fuerit parallelogrammum, ſolidum inde genitum vocatur *parallelepipedum*; ſi vero planum deſcribens fuerit quadratum, ſolidum vocatur *cubus*. Quod ſi rectae lineae e ſingulis polygonae baſis angulis extra ſuperficiem planam adſurgentes, & rectilineam ſolidi faciem terminantes non ſint parallelae, ſed coeant in punctum, ſolidum dicitur *pyramis*, punctum autem illud dicitur *vertex* pyramidis.

CRROLLARIA.

344. Priſmatis oppoſita latera ACB, DFE aequalia ſunt, ſimilia, & parallela, quandoquidem ACB fluendo per AD motu ſibi ſemper parallelo tandem congruit cum DFE. Inſuper dum plana ſupeiſicies ACB motu ſibi ſemper parallelo deſcri-

lo deſcribit priſma ABCEFD, latera AC, CB, BA motu itidem ſibi ſemper parallelo deſcribunt parallelogramma AD FC, CFEB, ADEB, adeoque priſma tot parallelogrammis circumſcribitur quot ſunt latera planae ſuperficiei deſcribentis.

345. Parallelepipedum ſex parallelogrammis, cubus autem ſex quadratis aequalibus circumſcribitur. Nam praeter quatuor facies parallelo laterum motu deſcriptas habentur etiam in parallelepipedo duae facies parallelo baſeos motu genitae. Atqui in primo caſu baſis illa eſt parallelogramma, in ſecundo vero quadrata, ergo patet propoſitum.

346. In pyramide ſi ſingula baſeos latera ſint inter ſe aequalia & latera rectilinea ipſius pyramidis pariter aequalia, facies omnes erunt triangula iſoſcelia aequalia.

PROPOSITIO CXXXI.

347. Rectae AB, EF eidem rectae CD parallelae non tamen in eodem cum illa plano exiſtentes ſunt inter ſe parallelae (*fig.* 78.)

In plano parallelarum AB, CD ducatur GK normalis ipſi CD, itemque in plano parallelarum EF, CD ducatur HK eidem CD perpendicularis, & jungatur GH; Eſt igitur CK normalis plano GKH; quare cum AG, EH ſint parallelae ipſi CK, erunt AG, EH normales plano GKH, ac proinde AG, EH ſunt inter ſe parallelae.

PROPOSITIO CXXXII.

348. Si rectae HG, GK in puncto G coeuntes ſint rectis LM; LN in L coeuntibus parallelae at non in eadem ſuperficie plana, anguli HGK, MLN erunt aequales, & plana per ipſas traducta inter ſe parallela (*fig.* 81.)

Fiat GK = LN, & GH = LM, junctae LG. HM, KN erunt aequales, & parallelae, itemqne aequales erunt & paral-

parallelae junctae KH, MN, quare triangula KGH, NLM ſunt ſimilia & aequalia, hinc angulus KGH = NLM, planum vero NLM parallelum plano KGH, cum ſint aequales & parallelae rectae GL, KN, HM.

PROPOSITIO CXXXIII.

349. Si quaelibet pyramis ABDEC ſecetur plano HFGK baſi BDEC parallelo, ſectio, ſive figura HFGK ſimilis erit ipſi BDEC (*fig.* 79.)

Cum enim plana HFGK, BDEC ſint parallela, parallelae erunt & eorum ſectiones cum planis pyramidis, ſcilicet rectae HF, FG, GK erunt parallelae rectis BD, DE, EC, erit ergo BA : AH = DA : AF = EA : AG = CA : AK, proindeque erit BD : DE = HF : FG; DE : EC = FG : GK; EC : CB = GK : KH, ſunt autem anguli BDE ; HFG, aequales, ut et alii conreſpondentes, quare ſectio HFGK ſimilis eſt baſi BDEC.

COROLLARIUM.

350. Quoniam vero oppoſita parallelogrammorum latera priſma vel parallelepipedum continentia ſunt aequalia, ſectiones parallelae in duobus hiſce ſolidis non modo ſunt ſimiles ſed etiam aequales.

RROPOSITIO CXXXIV.

351. Si quodlibet priſma XZQ ſecetur planis parallelis XZY, STV, PRQ, portiones, ſive priſmata XZV, STQ erunt inter ſe ut altitudines, nempe ut rectae a quolibet puncto plani ſuperioris ſuora oppoſitum planum normaliter demiſſae ſive ut latera XS, SP, (*fig.* 80.)

Duca.

Ducatur enim ex quolibet puncto vel angulo Z recta Zo normalis lateri oppoſito XY, & per quodlibet punctum *r* ejusdem normalis traducatur *mnea* oppoſito plano XYQP parallelum, erunt ſectiones *mn*, *fe*, *ae* inter ſe parallelae, itemque parallelae ſectiones *ma*, *ne* erit ergo parallelogrammum *mnef* ad parallelogrammum *fera* ut latus *mf* : *fa* ſive XS : SP, atque ita ſemper; ergo omnia parallelogramma priſmatis XZV ad omnia parallelogramma priſmatis STQ, ſcilicet priſma XZV ad priſma STQ erit ut altitudo XS ad altitudinem SP.

PROPOSITIO CXXXV.

352. *Priſmata aequales altitudines habentia ſunt inter ſe ut baſes* (*fig.* 80, 83.).

Sumantur in altitudinibus vel perpendicularibus aequalibus ZD, XP portiones aequales ZL, XS, & per puncta L, & S traducantur plana LOMNX, STV baſibus parallela, eruntque plana illa ſive ſectiones ſuis baſibus aequales, erit ergo quaelibet ſectio LOMNX ad baſim ZAPKGH ut ſectio STV ad baſim XZY. & permutando ſectio LOMNX : STV = ZAPKGH : XZY, atque ita ſemper; ergo ſectiones omnes unius priſmatis ad ſectiones omnes alterius priſmatis ſcilicet unum priſma ad aliud erit ut illius baſis ad hujus baſim.

COROLLARIUM.

353. Si ergo baſes & altitudines priſmatum fuerint aequales priſmata aequabuntur ſe, & ſi ſint aequalia, & habeant aequalem altitudinem, baſes etiam habebunt aequales.

SCHO-

SCHOLION.

354. Hic autem obſervaſſe juverit, quod cum dicimus priſmata aequalium baſium & altitudinum aequari inter ſe, non intelligimus tantum de priſmatis ad baſim normaliter erectis, ſed & de priſmatis quomodocumque obliquis, at inter eadem plana parallela exiſtentibus. Enimvero ſint duo priſmata ABHGI, OHGIP (*fig.* 84.) ſuper eadem baſi GHI, & inter eadem plana parallela HGI, & AP, quae ſecentur planis baſi parallelis, erunt plana DEF, MKL inter ſe aequalia, ſunt enim rectae OP, HI inter ſe aequales, & parallelae, & aequales pariter & parallelae rectae BH, CI, nec non OH, PI. Sed EF = KL, utraque enim aequatur parallelae HI, quare EI, & KI ſunt parallelogramma, ac proinde EF = HI = KL. Eadem ratione eſt DE = MK, & triangula EDF, KML ſunt aequilatera, ac proinde inter ſe aequalia, & hoc ſemper, unde conſtat propoſitum.

PROPOSITIO CXXXVI.

355. Priſmata XQ, LK aequales baſes habentia ſunt inter ſe ut altitudines ſcilicet ut PX, GL. (*fig.* 80. 81.)

Ex priſmate majore XQ abſcindatur priſma XV, quod eandem habeat altitudinem cum priſmate LK, & ex puncto vel angulo T demittatur recta TN normalis lateri oppoſito SV, & per normalis illius punctum aliquod I traducatur planum *maen* oppoſito plano PQYX parallelum. Et quoniam parallelogrammum *mnef* ad parallelogrammum *feca* eſt ut *mf*: *fa* = XS: SP, atque ita ſemper, erunt omnia parallelogramma priſmatis XQ ad omnia parallelogramma priſmatis XV, ſcilicet priſma XQ ad priſma XV ut XP: XS. Sed priſma XV aequatur priſmati LK, ergo priſma XQ ad priſma LK erit ut altitudo XP: XS, vel LG.

PRO-

PROPOSITIO CXXXVII.

356. Pyramides eandem habentes altitudinem ſunt inter ſe ut baſes (*fig.* 85. 86.).

Demiſſis ex pyramidum verticibus A, F rectis AR, FG normalibus in ſubjecta plana agantur per puncta V, X aeque diſtantia a verticibus A, F plana NOQP, KLM baſibus earundem pyramidum parallela, eritque ſectio NOQP ſimilis baſi BCDE; ſectio vero KLM ſimilis baſi EHI, ac proinde baſis CBED ad ſectionem OQPN ut RAq; AVq, vel GFq: FXq, vel ut baſis EHI ad ſectionem KLM, & permutando ſectio OQPN ad ſectionem KLM ut baſis CBED ad baſim EHI, atque ita ſemper, ergo ſectiones omnes pyramidum ſive pyramides ipſae ſunt ut baſes CBED, EHI.

COROLLARIUM.

357. Si ergo pyramides eandem, vel aequales altitudines habuerint, easdemque baſes erunt inter ſe aequales, & ſi fuerint aequales; & habeant aequales altitudines, aequales habebunt & baſes, intelligendo nomine altitudinum rectas quae ab illarum verticibus normaliter caduot in planum oppoſitum.

SCHOLION.

358. Ne cui vero haereat aqua circa aequalitatem pyramidum ſuper eadem baſi, & inter eadem plana parallela conſtitutarum, ſunto binae pyramides BCDA, CBDL (*fig.* 87.) ſuper eadem baſi BCD, & inter plana parallela BCD, & AH, quae ſecentur planis baſi parallelis, erunt plana ipſa EGK, HMN inter ſe aequalia. Nam

cum

cum plana EKHN, & BCD ſiet parallela, ſectiones EG, MN ſunt pariter rectae BD parallelae, quare BD : EG = BA : AE = BL : LM = BD : MN, ergo EG = MN; eadem ratione KE = HM, unde triangula KEG, HMN ſunt aequilatera, adeoque inter ſe aequalia, & hoc ſemper, unde conſtat propoſitum.

PROPOSITIO CXXXVIII.

359. Priſma triangulare BACFED dividitur in tres pyramides aequales (*fig.* 82.).

Ducantur rectae AE, CE, AF, eritque pyramis BACE aequalis pyramidi ACEF, habent enim aequales baſes BEC, CEF, eandemque altitudinem. Sed & pyramis ACEF aequalis eſt pyramidi ADEF ob eandem rationem; ergo priſma dividitur in tres pyramides aequales, nempe triplum eſt pyramidis inſcriptae DEFA eandem baſim DEF habentis, & altitudinem EB.

COROLLARIA.

360. Quodvis aliud priſma, vel etiam parallelepipedum triplum eſt pyramidis eandem baſim, & altitudinem habentis. Nam baſis polygona dividi poteſt in aliquem triangulorum numerum, & per conſequens priſma in totidem priſmata triangularia, ut & pyramis ſuper eadem baſi dividitur in totidem pyramides triangulares, quae ſunt pars tertia priſmatis ſuper eodem triangulo ad eandem altitudinem conſtituti.

361. Quoniam vero priſmata aequales baſes habentia ſunt inter ſe ut altitudines, pyramides pariter aequalium baſium erunt ad invicem ut altitudines, ſunt enim inter ſe ut eorum tripla, ſcilicet ut priſmata.

PRO-

PROPOSITIO CXXXIX.

362. Priſmata XQ, LK ſunt in ratione compoſita altitudinum, & baſium (*fig.* 80, 81.).

Fiat priſma XV altitudinem habens XS aequalem altitudinum LG, erit priſma XQ ad priſma LK in ratione compoſita ex ratione priſmatis XQ: XV, ſive altitudinis XP: XS, & ex ratione priſmatis XV: LK, ſive baſeos STV ad baſim LMN.

COROLLARIA.

363. Ergo & pyramides quippe quae ſunt tertiae partes priſmatum, erunt in ratione compoſita ex altitudinibus, & baſibus.

364. Hinc eſt quod ſi tum priſmata tum pyramides habeant baſes altitudinibus reciprocas aequabuntur inter ſe, & ſi aequentur, baſes habent altitudinibus reciprocas, quae enim ex reciprocis componitur ratio eſt aequalitatis, & ratio aequalitatis ex reciprocis componitur.

365. Unde conſtat priſmata ſimilia, ea nempe in quibus longitudines, latitudines & altitudines ſunt proportionales, adeoque baſes ſunt inter ſe ut altitudinum quadrata, eſſe in ratione triplicata laterum homologorum, vel altitudinum ſive etiam perimetrorum baſium. Et quidem in priſmatis ſimilibus XQ, LK baſes ſunt in duplicata ratione laterum homologorum XZ, LM, ſive altitudinum XP, LG; adeoque ratio priſmatum ſimilium utpote compoſita ex ratione baſium, & altitudinum erit triplicata rationis altitudinum XP, LG vel laterum homologorum XZ, LM, vel perimetrorum XYZ, LNM; Atque hoc intelligi debet non modo de pyramidibus ſimilibus quae ſunt tertiae par-

tes priſmatum, ſed & de aliis corporibus ſimilibus tum regularibus, tum inregularibus, definitione priſmatum ſimilium ad omnia corpora ſimilia adplicata, quandoquidem hujuſmodi corpora dividi poſſunt in tot pyramides ſimiles, quarum quaelibet eſt ad aliam ſibi reſpondentem in ratione triplicata laterum homologorum.

366. Unde ſi fuerint quatuor rectae continue proportionales ſolidum ſub prima deſcriptum eſt ad ſimile ſolidum, quod deſcribitur a ſecunda ut prima recta ad quartam, ad quam prima rationem habet triplicatam primae ad ſecundam.

PROPOSITIO CXL.

367. Solidorum curvilineorum geneſim explicare.

Si recta ſublimis motu ſibi ſemper parallelo circuli circumferentiam radat, figura ſolida hoc motu genita *cylindrus* adpellatur. Quod ſi recta per aliquod fixum punctum, & ſublime traducta, & utrinque indefinite producta ita moveatur, ut circuli perimetrum perpetuo contingat, utrumque ſolidum a motu rectae deſcriptum vocatur *conus*, & punctum illud ſublime utriuſque coni *vertex* nuncupatur. Recta per utriuſque circuli centrum tranſiens in cylindro, in cono autem per ipſum verticem, & centrum baſeos dicitur *axis*, qui quidem ſi fuerit baſi perpendicularis, ſolidum genitum vocatur conus, vel cylindrus *rectus*, ſecus vero dicitur *obliquus*. Iam vero ſi ſemicirculus circa immotam diametrum ducatur in orbem donec eo revertatur, unde moveri coepit, ſolidum inde genitum dicitur *ſphaera*, & *ſector ſphaericus* vocatur ſolidum quod generatur a ſectore circuli circa ſuum axem gyrantis.

CO-

COROLLARIA.

368. Si baſis priſmatis vel pyramidis aucto in infinitum numero laterum, eorumque magnitudine in infinitum proinde imminuta abeat in curvam continuam, patet priſma abire in cylindrum, & quidem rectum, ſi ejus latera ſint baſi perpendicularia, pyramidem vero abire in conum, & quidem rectum, ſi baſeos latera ſint aequalia, & aequales diſtantiae a vertice, ut proinde ea omnia de cylindris, & conis comprobentur, quae de priſmatis, & pyramidibus demonſtrata ſunt: Et I. quidem in conis & cylindris ſectiones baſi parallelae ſunt circulares. Ut autem haec veritas magis eluceſcat ducatur axis AL; & ſecetur conus plano triangulari ABC per axem traducto (*fig.* 79.) erit HK parallela ipſi BC. Sumatur autem quodvis punctum G in perimetro ſectionis, & jungatur AG, quae producatur ad perimetrum baſeos in E, & agatur LE, erit ob ſimilitudinem triangulorum OG: LE = AO: AL, ergo OG habet ad circuli radium LE datam rationem ipſius AO: AL quae proinde erit datae magnitudinis, unde ſectio HGK eſt circulus. In cylindro res patet ex ipſius geneſi; Unde conligi poteſt centra omnium circulorum baſi parallelorum tam in cono quam in cylindro eſſe in diametro utriuſque, ſive in recta a vertice coni, vel a centro circuli ſuperioris in cylindro ad centrum baſeos ducta. Quod autem in cono planum per axem traductum ſit triangulum patet ex geneſi ejusdem coni; ubi enim recta genitrix pertinget ad puncta B, C, congruet cum ipſis BA, AC ſectione genitis, cum jacere debeat in ſuperficie coni, & illa per puncta A, B, haec vero per A, C tranſire; Atqui ſectio BC eſt linea recta, ergo patet propoſitum. II. Cylindri, & coni eandem altitudi-

tudinem habentes ſunt inter ſe ut baſes, & ſi aequales habeant baſes, ſunt inter ſe ut altitudines, unde aequantur inter ſe cylindri, itemque coni, ſi baſes habeant aequales, & aequales itidem altitudines. *III.* Cylindros itemque conos eſſe in ratione compoſita ex ratione altitudinum, & baſium, unde ſi baſes fuerint altitudinibus reciprocae, aequales ſunt inter ſe cylindri, itemque aequales coni, proindeque ſimiles cylindros, ſimileſque conos eſſe in ratione triplicata laterum homologorum, vel altitudinum, ſive axium. IV. Cylindrum eſſe triplum coni.

369. Si ſphaera ſecetur quolibet plano BED, ſectio erit circulus (*fig.* 88.) Nam ex centro C ejusdem ſphaerae demiſſa CE plano ſecanti perpendiculari, ductiſque ad perimetrum ſectionis rectis EB, EO, ED, ut & radiis CB, CO, CD, quoniam eſt $CBq = CEq + EBq$; $COq = CEq + EOq$; $CDq = CEq + EDq$, & eſt $CBq = COq = CDq$, erit $CEq + EBq = CEq + EOq = CEq + EDq$, ablato communi CEq, erit $EBq = EOq = EDq$, unde $EB = EO = ED$, quare ſectio BOD erit circulus, cujus centrum E. Si centrum ſphaerae ſit ſimul in plano ſecante, res patet.

370. Unde conſtat idem eſſe centrum ſphaerae, & circuli in cujus plano centrum ſphaerae reperitur, normalem vero ductam a ſphaerae centro ad planum quod non tranſit per ſphaerae centrum cadere in centrum circuli ſphaeram ſecantis.

371. Circuli quorum plana per ſphaerae centrum tranſeunt ſunt inter ſe aequales. Illorum enim radii aequantur radio ſphaerae, proindeque omnium hujuſmodi circulorum radii aequales ſunt inter ſe, & per conſequens ipſimet circuli aequales.

372. In ſphera circulus qui per centrum tranſit eſt omnium maximus, aliorum huic proprior eſt major remotiore, duo vero ſunt aequales utrinque a diametro diſtantes

Digitized by Google

tes & viceverſa. Cum enim ſit AC + CH = BC + CD, & BC + CD > BD, erit AH > BD, ergo circulus per AH eſt major circulo per BD; quoniam vero CB + CD = CF + CG & angulus BCD > FCG erit BD > FG, unde circulus per BD eſt major circulo per FG. Praeterea cum ſit $CKq + KLq = CLq$, & $CEq + EOq = COq$, & $CLq = COq$, erit $CKq + KLq = CEq + EOq$, demtis aequalibus CEq, CKq, ſupererit $KLq = EOq$, & KL = EO, proindeque circulus RP aequalis eſt circulo BD. Quod ſi circulus maximus AH per centrum non tranſeat, alius tranſeat, is ergo major erit circulo AH contra hypotheſim. Inſuper ob $CKq + BLq = CEq + EOq$, ſi EO = BL, erit CB = CE, ſin BL < EO, erit CB > CE.

373. Per duo quaevis puncta in ſuperficie ſphaerae adſumta circulus maximus traduci poteſt. Si enim data duo puncta inter ſe & cum centro conjugantur, conſtituetur triangulum, quod in eodem plano totum jacebit, quo ſi ſphaera ſecetur, habebitur circulus maximus qui per duo illa puncta tranſibit.

PROPOSITIO CXLI.

374. Spherae centrum invenire.

Secetur ſphaera quocumque plano BOD per centrum ipſius non tranſeunte, & ex invento centro E circuli ſecantis erigatur EC ad planum ipſum normalis, quae utrinque producatur uſque ad ſuperficiem ſphaerae N, M, ſectaque NM bifariam in C, erit hoc ſphaerae centrum quaeſitum. Cum enim recta NM ſit normalis cuilibet BD, eadem erit diameter, cujus punctum biſectionis C erit centrum, quod quaerebatur.

CO-

COROLLARIUM.

375. Unde conſtat ſphaerae datae centrum inveniri in normali NM per centrum E minoris circuli tranſeunte.

PROPOSITIO CXLII.

376. Recta ex ſphaerae centro C ad centrum E circuli ſecantis BOD demiſſa eſt plano illi perpendicularis.

Cum enim CE cadat in centrum E circuli BOD, erit BE = ED, quare cum recta BD bifariam ſecetur a recta CE ſecabitur ad rectos angulos; idem oſtenditur de aliis ejusdem diametris, unde recta CE eſt plano BOD normalis.

CAPUT II.

De Dimenſione Solidorum.

PROPOSITIO CXLIII.

377. Superficies priſmatis recti AB demtis baſibus aequatur rectangulo ex altitudine RS ejusdem priſmatis in perimetrum baſeos AZHGKP (*fig.* 83.)

Priſmatis ſuperficies ex totidem conſtat parallelogrammis, quot ſunt latera in ejus perimetro, quoniam ergo horum quodlibet aequatur rectangulo ex altitudine in latus baſeos, erit tota priſmatis ſuperficies aequalis rectangulo ex altitudine in totam perimetrum baſeos.

Quod ſi huic producto addatur dupla ſuperficies baſeos, habebitur tota priſmatis ſuperficies.

CO.

COROLLARIA.

378. Quoniam ſex quadratis aequalibus terminatur cubus, habebitur tota cubi ſuperficies, ſi quadrati unius ſuperficies ſexies adſumatur. Cum autem parallelepipedum ſex terminetur ſuperficiebus, quarum duae quaelibet oppoſitae ſunt aequales, inveniantur tres inaequales ſuperficies, earumque ſumma bis accipiatur, & ſic habebitur tota parallelepipedi ſuperficies.

379. Quoniam vero multiplicato in infinitum numero laterum, eorumque magnitudine in infinitum proinde decreſcente baſis priſmatis abit in circulum, & priſma in ſolidum cylindricum, hujus pariter ſuperficies curva aequabitur rectangulo ex altitudine in perimetrum baſeos.

380. Ergo ſi ſuperficies priſmatis, vel cylindri ſecetur quotcumque planis parallelis, portiones ſuperficiei iiſdem planis interceptae erunt ut altitudines.

PROPOSITIO CXLIV.

381. Priſmatis recti ſuperficies baſim habens polygonum regulare eſt ad baſim ut altitudo RS ad SV ſemiſſem normalis ad polygoni latus ductae.

Cum enim priſmatis ſuperficies aequetur rectangulo ex altitudine RS in perimetrum baſeos, baſis vero aequetur rectangulo ex ſemiſſi normalis SV in eandem perimetrum, erit ſuperficies priſmatis ad baſim ut primum rectangulum ad Secundum, hoc eſt ob communem baſim ut RS : SV vel ut duplum ipſius RS : ST.

Digitized by Google

COROLLARIA.

382. Ergo & ſuperficies cylindrica eſt ad circulum baſeos ut altitudo ad dimidium radii baſeos circularis, ſive ut rectangulum ex altitudine in diametrum baſeos ad quadratum radii.

383. Hinc inveniri poterit circulus aequalis ſuperficiei dati cylindri, ſi ſumatur GH media proportionalis inter altitudinem FB (*fig.* 89.), & diametrum baſeos AB, & radio GH deſcribatur circulus, qui erit aequalis ſuperficiei cylindri dati EFBA.

PROPOSITIO CXLV.

384. Superficies pyramidis, cujus latera omnia ſunt aequalia, & aequalia pariter latera baſeos, cujuſmodi eſt BCDA demta baſi aequatur rectangulo ex perimetro BCD in ſemiſſem rectae AE ductae a vertice normaliter ad quodvis latus DC perimetri (*fig.* 95.)

Superficies hujuſmodi pyramidis componitur ex totidem triangulis iſoſcelibus aequalibus, quot ſunt latera perimetri baſeos, quorum quodlibet aequatur rectangulo ex latere perimetri, cui inſiſtit, in ſemiſſem normalis AE ductae a vertice normaliter ad idem latus, ergo tota ſuperficies pyramidis dempta baſi aequatur rectangulo ex integra perimetro in ſemiſſem dictae perpendicularis AE.

COROLLARIA.

385. Quoniam autem aucto in infinitum numero laterum, eorumque proinde magnitudine in infinitum imminuta, baſis pyramidis abit in curvam circularem, & pyramis

ramis in conum, hujus pariter ſuperficies curva aequalis eſt rectangulo ex perimetro ſuae baſeos in ſemiſſem rectae, quae ſit latus ejusdem coni.

386. Cum autem rectangulum ex dimidio radii in perimetrum circuli aequetur eidem circulo, erit ſuperficies conica ad circulum ſuae baſeos ut rectangulum ex hujus perimetro in ſemiſſem lateris coni ad rectangulum ex dimidio radii in perimetrum dictae baſeos circularis, ſcilicet ut ſemiſſis lateris coni ad ſemiſſem radii, vel ut illius latus ad radium, ob baſim nempe communem.

387. Inveniri ergo poterit circulus aequalis ſuperficiei conicae ſi ſumta GP media proportionali inter latus coni AC, & radium baſeos BC (*fig.* 90.) deſcribatur radio PG circulus HGQ, qui aequalis erit ſuperficiei conicae ADBCA. Eſt enim AC : BC = PG*q* : BC*q*, velut ut circulus HGQ ad circulum DEC; ſed ut AC : BC, ita ſuperficies conica ad eundem circulum DEC; quare ut circulus HGQ ad circulum DEC, ita ſuperficies conica ad ipſum circulum DEC, proindeque circulus HGQ, & ſuperficies conica aequantur inter ſe.

388. Hinc ſi in conis DAC, *dac* (*fig.* 90. 91.) ſumantur rectae DX, *dx* mediae proportionales inter latera, & radios conorum, quoniam ſuperficies conica DAC aequatur circulo radii DX : & ſuperficies conica *dac* aequatur circulo radii *dx*, ſuperficies conichae erunt inter ſe ut iidem circuli, vel ut quadrata radiorum DX, *dx*, vel ut rectangula ex AD $\bowtie$ DB, & ex *ad* $\bowtie$ *db*.

PROPOSITIO CXLVI.

389. Quaelibet ſuperficies cylindrica AF eſt ad quamlibet ſuperficiem conicam DAC ut rectangulum per axem AF ad rectangulum ex latere DA in radium DB (*fig.* 89. & 90.)

Fiat in cylindro recta AV media proportionalis inter latera AB, & EA, & in cono ipſa DF media proportionalis inter latus AD, & radium DB, erit ſuperficies cylindrica AF aequalis circulo radii AV, ſuperficies vero conica aequalis circulo radii DF, ergo dictae ſuperficies ſunt inter ſe ut iidem circuli, vel ut quadrata radiorum AV, DF, vel ut rectangula ex EA ⋈ AB, & AD ⋈ DB.

PROPOSITIO CXLVII.

390. Superficies coni recti ex AD circa AC eſt ad coni ſuperficiem ex BD circa BC, ut AD : BD (*fig. 96.*)

Nam ſuperficies ex AD aequatur rectangulo ex dimidia AD in circumferentiam circuli, cujus radius ſit CD, & ſuperficies coni ex BD aequatur rectangulo ex dimidia BD in ejusdem circuli circumferentiam, ergo ſuperficies ex AD ad ſuperficiem ex BD eſt ut primum rectangulum ad ſecundum, ſcilicet ob baſim communem ut dimidia AD ad dimidiam BD, vel ut tota AD ad totam BD.

PROPOSITIO CXLVIII.

391. Superficies pyramidis truncatae plano baſi parallelo aequatur dimidio producto ex ſumma perimetri baſeos, & ſectionis in diſtantiam perpendicularem baſium.

Enimvero facies omnes pyramidis abeunt in trapetia aequalia, quorum quodlibet cum in duo triangula dividi poſſit, quorum baſes ſunt ſectionis, et baſeos latera, altitudo autem communis eſt ipſarum baſium diſtantia perpendicularis, cumque ſingulorum triangulorum menſura ſit ſemiſſis producti ex ſingulis baſibus in ipſam baſium diſtantiam, patet ſuperficiem hujuſce pyramidis aequari dimidio producto ex ſumma perimetri baſeos, et ſectionis in diſtantiam perpendicularem baſium.

PRO-

Digitized by Google

PROPOSITIO CXLIX.

392. Superficies coni recti plano baſi parallelo truncati aequatur dimidio producto ex ſumma peripheriarum in longitudinem ſive latus coni truncati (*fig.* 90.)

Quoniam ſuperficies conica DAC eſt ad ſuperficiem conicam FAL ut $AD \times DB : AF \times FI$, erit convertendo ſuperficies conica DAC ad ſuperficiem trunci conici DFLC ut $AD \times DB : FD \times DB + FD \times FI$ ſive ad $FD\ (DB + FI)$; vel etiam ut AD in perimetrum a radio DB ad FD in perimetros a radiis DB, FI, vel ut rectangulum ex AD in ſemiperimetrum a radio DB ad rectangulum ex FD in ſemiperimetros a radiis DB, FI; Aequatur autem primum rectangulum ſuperficiei conicae DAC, ergo ſecundum aequatur ſuperficiei trunci conici.

COROLLARIUM.

393. Quoniam vero eſt $DB : FI = DA : AF$, erit componendo $DB + FI : FI = DA + AF : AF$; ſed ſi bifariam ſecetur recta FD in H eſt $2AH = DA + AF$, ergo $\frac{DB + FI}{2} : FI = AH : AF$; Et eſt $AH : AF = HG : FI$, ergo $\frac{DB + FI}{2} : FI = HG : FI$, quare $\frac{DB + FI}{2} = HG$. Hinc ſi ex puncto H ducatur recta HK parallela ipſi DC; patet perimetrum circuli a radio HG, vel diametro HK aequari ſemiſummae perimetrorum a radiis DB, FI, vel a diametris DC, FL, proindeque rectangulum ex FD in perimetrum circuli a diametro HK aequari ſuperficiei trunci conici DFLC.

PROPOSITIO CL.

394. Quadranti OGK circumſcriptum ſit quodvis polygonum regulare quotlibet laterum KH, HF, FE, EB, quae eundem tangant in punctis K, I, G, D, quomodocumque acceptis, at extra verticem O, et fiat parallelogrammum CL ejusdem altitudinis cum ſolido; dico quod ſi hujuſmodi figurae circa OC revolvantur, erunt ſuperficies a lateribus polygoni deſcriptae aequales ſuperficiei cylidricae deſcriptae a recta LK. (*fig.* 92.)

Expendatur unum ex hiſce lateribus ex. gr. EF, et producatur uſque ad axem in A, et jungatur CE. Et quoniam ob ſimilitudinem triangulorum ANE, ASF, AMG, GMC eſt NS vel PQ : EF = AN : AE = AM : AG = MG : GC = SQ, erit PQ $\bowtie$ QS = EF $\bowtie$ MG. Sed circulorum perimetri ſunt ut radii, quare rectangulum ex PQ in perimetrum radii QS aequatur rectangulo ex EF in perimetrum radii GM. Sed primum rectangulum aequatur ſuperficiei genitae ex PQ, et ſecundum aequatur ſuperficiei conicae ab ipſa EF deſcriptae, et ſic de ceteris, quare tota ſuperficies polygoni aequalis eſt toti ſuperficici cylindricae.

COROLLARIUM.

395. Et quoniam multiplicato in infinitum numero laterum polygoni, eorumque magnitudine in infinitum proinde decreſcente polygonum abit in curvam continuam circularem, erit tota ſuperficies hemiſphaerica a quadrante deſcripta aequalis curvae ſuperficiei cylindricae a circumſcripto quadrante deſcriptae, quaelibet autem portio OE, OF,

OF, EF aequalis portioni reſpondenti ſuperficiei cylindricae aeque altae ON, OS, NS, adeoque portionis ſphaericae ſuperficies ſunt ut axis abſciſſae.

PROPOSITIO CLI.

396. Superficies ſegmenti ſphaerici BRG aequatur areae circuli radium habentis chordam RG, et integra ſphaerae ſuperficies aequatur areae circuli radium habentis ipſam ſphaerae diametrum. (*fig.* 97.)

Quoniam eſt RE, vel OT : RG = RG : RQ, hoc eſt ut dimidia perimeter radii RG ad dimidiam perimetrum radii RQ, ſive ad perimetrum radii CG, vel ET, erit rectangulum ex OT in perimetrum radii ET, ſcilicet ſuperficies cylindrica OTSL, ſive ſuperficies ſegmenti ſphaerici BRG aequale rectangulo ex RG in dimidiam perimetrum radii RG, videlicet areae circuli radium habentis ipſam RG, ac proinde conveniente puncto G cum puncto Q, et ipſa RG diametrum adaequante, ſuperficies totius ſphaerae aequatur areae circuli radium habentis diametrum ejuſdem ſphaerae.

COROLLARIA.

397. Ergo tota ſphaerae ſuperficies quadrupla eſt areae circuli radium habentis radium ſphaerae, videlicet quadrupla eſt areae circuli maximi ipſius ſphaerae.

398. Curva cylindri ſuperficies ſphaerae circumſcripti una cum baſibus eſt ſeſquiplicata, vel ſeſquialtera ſuperficiei inſcriptae ſphaerae; ſcilicet eſt ad hanc ut 6 : 4. Nam curva cylindri ſuperficies ſine baſibus cum ſit aequalis ſuperficiei ſphaericae, ſive quatuor circulis ejuſdem maximis, adjectis binis circulis baſeos, erit tota ſuperficies cylindri

una

una cum baſibus aequalis ſex circulis ſphaerae maximis; unde ſuperficies cylindri erit ad ſuperficiem ſphaerae ut 6 : 4.

399. Superficies coni aequilateri, et cylindri ſphaerae circumſcriptorum cum ſuperficie ejusdem ſphaerae ſunt in continua ratione ſeſquialtera, videlicet ſunt inter ſe ut ∺ 9. 6. 4. Cum enim (*fig.* 93.) angulus BGC ſemiſſis anguli BGD ſit = BDG, triangula rectangula BGC, BGD ſunt ſimilia, erit ergo GB : BC = DB : BG, & GBq : BCq = DBq : BGq. Sed BDq triplum eſt ipſius BGq, ergo et circulus radii BG triplus eſt circuli radii BC, ſcilicet eſt ille ad hunc ut 3 : 1. Sed ſuperficies conica GDH dupla eſt circuli ſuae baſeos, ergo ſuperficies conica una cum circulo ſuae baſeos tripla eſt circuli radii BG, ſcilicet eſt ad hunc circulum ut 9 : 3., quare tota ſuperficies conica una cum baſi erit ad circulum radii CB ut 9 : 1. Sed tota cylindri ſuperficies ſphaerae circumſcripti ad eundem circulum radii CB eſt 6 : 1, ergo ſuperficies conica ad cylindricam eſt ut 9 : 6; ſed haec ad ſuperficiem ſphaericam inſcriptam eſt 6 : 4, ergo ſuperficies conica, cylindrica, et ſphaerica ſunt in continua ratione ſeſquialtera.

PROPOSITIO CLII.

400. Conica ſuperficies LAM eſt media proportionalis inter ſphaericam ſuperficiem LAM, et circulum radii LN.

Superficies ſphaericae portionis LAM aequatur circulo radii AL, ergo ad circulum radii LN eſt ut ALq : LNq, ſive in duplicata ipſarum ratione. Sed conica ſuperficies LAM ad eundem circulum radii LN eſt ut AL : LN, ſive in ſubduplicata ratione ſphaericae portionis LAM ad circulum ſuae baſeos, ergo cadem conica ſuperficies eſt

media

media proportionalis inter ſphaericam ſuperficiem, et dictum circulum.

PROPOSITIO CLIII.

401. Portionis ſphaericae ſuperficies LAM eſt ad ſuperficiem inſcripti coni aequilateri LAM ut AL: LN, ſcilicet ipſius dupla.

Eſt enim ſuperficies ſphaerica LAM aequalis circulo radii AL, et ſumta LO media proportionali inter latus coni AL, et radium LN, ſuperficies conica LAM aequatur circulo radii LO, ergo ſphaerica ſuperficies LAM eſt ad conicam LAM, ut $ALq : LNq$, vel AL: LN ſcilicet ipſius dupla.

PROPOSITIO CLIV.

402. Portionis ſphaericae ſuperficies LAM eſt ad circulum LM in quadrupla ratione.

Eſt enim ſphaerica illa ſuperficies ad circulum, ut $ALq : LNq$, nempe in ratione quadrupla, nam eſt AL dupla ipſius LN.

PROPOSITIO CLV.

403. Sphaerica ſuperficies LAMB eſt ad totam ſuperficiem coni aequilateri comprehenſa baſi, ſcilicet ad ALNM ut 16: 9.

Quoniam ſuperficies ſphaerica LAM eſt ad ſuperficiem inſcripti coni aequilateri LAM in ratione dupla, ſcilicet ut 8: 4, et & ad circulum LM in ratione quadrupla, nempe ut 8: 2, erit eadem ad totam ſuperficiem coni aequilateri comprehenſa baſi, ut 8: 6, vel 12: 9, ad ſuperficiem vero ſphaericam LBM, ut NA; NB quartam diametri

metri partem, nempe tripla, ſcilicet ut: 12. 4, quare tota ſuperficies ſphaerica LAMB ad totam conicam LANM eſt ut 16: 9,

COROLLARIUM.

404. Aequilateri coni ſphaerae circumſcripti tota ſuperficies quadrupla eſt ſuperficiei totius coni eidem ſphaerae inſcripti. Nam aequilateri coni ſphaerae circumſcripti tota ſuperficies eſt ad ſphaerae ſuperficiem ut 9: 4, et ſphaerae ſuperficies eſt ad totam ſuperficiem coni aequilateri inſcripti ut 16: 9, ergo ex aequo perturbate circumſcripti aequilateri coni tota ſuperficies eſt ad totam ſuperficiem aequilateri inſcripti ut 16: 4, ſive ut 4: 1.

PROPOSITIO CLVI.

405 *Eſto conus XDU ſphaericae portioni circumſcriptus & ſimilis inſcripto, erit ſuperficies conica XDU ad ſuperficiem ſphaericam LAM ut circulus XU ad ſuperficiem conicam LAM.*

Eſt conica ſuperficies XDU ad circulum XU ut DU: UN, ſive ut rectangulum DUN: UN*q*, & circulus XU: LM = NU*q*: NM*q*, circulus vero LM ad ſuperficiem ſphaericam LAM ut NM*q*: MA*q*, ergo ex aequo ſuperficies conica XDU ad ſuperficiem ſphaerae *inſcriptam* eſt ut rectangulum DUN: MA*q*, ſeu rationem compoſitam habet ex DU: AM, vel UN: NM, & UN: MA, ſive ut UN*q*: NMA, vel compoſita ex UN*q*: NM*q*, & NM*q*: NMA, aut circuli UN: NM, & NM ad ſuperficiem conicam AML, ergo ſuperficies conica XDU ad ſuperficiem ſphaericam LAM ut circulus XU ad ſuperficiem conicam LAM.

PRO.

PROPOSITIO CLVII.

406. Eſto quaelibet figura curvilinea, vel rectilinea OVKC, cujus axis OC, ejuſque complementum ad parallelogrammum circumſcriptum OXKC ſit OVKX, revolvatur autem OVKC circa OC, & KVOX circa KX, erit utraque ſuperficies curva utriuſque ſolidi aequalis curvae ſuperficiei cylindri, cujus radius CK, altitudo vero aequalis curvae KVO (*fig.* 91.)

Ducatur ubilibet recta NUP baſi CK parallela, et intelligatur in ſuperficie ſolidi circa OC peripheria deſcripta radio NV, & in ſuperficie ſolidi circa XK peripheria deſcripta radio PV. Quoniam ergo peripheriae ſunt ut radii a quibus deſcribuntur, erit utraque peripheria a radio NU & a radio PV deſcripta aequalis peripheriae quae deſcribitur a radio CK, & hoc ſemper, quare omnes peripheriae in ſuperficie ſolidi OVKC una cum omnibus peripheriis in ſuperficie ſolidi KVOX aequantur totidem peripheriis a radio CK ſemper aequali in alicujus cylindri ſuperficie deſcriptus, cujus altitudo aequetur ipſi KVO, ad cujus magnitudinem aeſtimanda eſt multitudo peripheriarum in utraque ſuperficie ipſi immediate ordinatim adplicatarum.

COROLLARIA.

407. Cum autem hoc ſemper obtineat de qualibet hujuſmodi ſuperficierum portione, etiam pars ſuperficiei a portione NVKC cum ſuperficie a portione KVP aequalis erit ſuperficiei cylindricae cujus altitudo UK.

408. Unde ſuperficies utriuſque ſolidi ad ſuperficiei portionem in pari altitudine ex utraque ſectam eſt ut tota curva genitrix OVK ad portionem ſuperficiei adſumtae KV.

T PRO-

PROPOSITIO CLVIII.

409. Priſmatis ſoliditatem metiri.

Multiplicetur polygonum, quod eſt baſis priſmatis per ipſam priſmatis altitudinem, et habebitur ſoliditas priſmatis, ut patet ex geneſi ejusdem ſolidi, producitur enim motu baſeos parallelo, proindeque baſis, ſcilicet polygoni ſuperficies per altitudinem multiplicari debet.

COROLLARIA

410. Cubi ſoliditas habetur, ſi facies quadrata baſeos per ipſum quadrati latus multiplicetur, ſoliditas vero parallelepipedi habetur per multiplicationem parallelogrammi in altitudinem.

411. Quoniam vero cylindrus tanquam priſma infinitilaterum conſiderari poteſt, invenietur cylindri ſoliditas, ſi circulus baſeos ducatur in altitudinem ipſius cylindri.

PROPOSITIO CLIX.

412. Pyramidis ſoliditatem invenire.

Quoniam priſma eandem cum pyramide baſim & altitudinem habens triplum eſt ejusdem pyramidis, ſumta menſura priſmatis ejusdem tertia pars accipiatur, quae erit ipſius pyramidis ſoliditas.

COROLLARIUM.

413. Cum autem conus tanquam pyramis infinitorum laterum haberi poſſit, erit conus tertia pars cylindri eandem baſim & altitudinem habentis.

PRO-

PROPOSITIO CLX.

414. Quilibet ſector ſphaericus genitus per revolutionem ſectoris circularis DAC circa axem AB aequalis eſt cono genito per revolutionem trianguli FAC, cujus altitudo radius AC, baſis vero recta AF aequalis chordae AD (*fig.* 94.)

Per quodvis punctum I ducatur in triangulo recta IO parallela ipſi AF, & deſcribatur ſemicirculus IMN, patet rectas AD, IM parallelas eſſe, ac proinde DA : MI = AC : CI = AF : IO, quare circulus radii DA ad circulum radii MI erit ut circulus radii AF ad circulum radii IO, et permutando & invertendo circulus radii AF in cono erit ad circulum radii DA, vel ad ſuperficiem ſphaericam ab arcu AD ut circulus radii IO in cono ad circulum radii MI vel ad ſuperficiem ſphaericam ab arcu IM. Sed circulus radii AF aequatur circulo radii AD, vel ſuperficiei ſphaericae arcus AD, quare & circulus radii IO aequatur ſuperficiei ſphaericae arcus IM, atque ita ſemper quilibet circulus in cono aequatur ſuperficiei ſphaericae ab arcu reſpondente in ſectore, ergo conus aequatur ſectori.

PROPOSITIO CLXI.

415. Eſto circuli quadrans AGC, ejuſque chordae AG ponatur aequalis AF diametro AB normalis, ipſi vero AF parallela ducatur DE, & jungantur AD, DC, FE; revolvantur autem triangulum FAE, nec non ſector ADC circa AC, orietur conus AFE aequalis ſectori ſphaerico ADC.

Cum enim ſphaerica ſuperficies ex rotatione arcus AD ſit aequalis circulo, cujus radius eſt chorda AD, et praeterea cum ſit AG*q*, vel AF*q* : AD*q* = AC : AE, erit

& circulus radii AF ad circulum radii AD ut AC : AE, quare conus AFE ab extremorum multiplicatione proveniens aequalis erit cono ex baſi aequali ſuperficiei ab arcu AD deſcriptae cum altitudine radii AC, qui aequatur ſectori ab ADC genito.

COROLLARIA.

416. Hinc ſectores ab A*d*C, ADC &c. geniti ſunt ut rectae A*e*, AE &c. quae dicuntur ſinus verſi arcuum A*e*, AE &c. qui ſunt altitudines conorum ipſis aequalium ſuper eadem baſi radii AF erectorum.

417. Item integra ſphaera aequatur cono baſi radii AF, & altitudine diametri AB, hemiſphaerium vero aequatur cono baſi eadem altitudine radii AC.

418. Exceſſus hemiſphaerii ab AGC ſupra ſectorem ab A*d*C genitum aequatur ſolido ex rotatione B*d*C circa AC aequali cono ex baſi circulo radii AF, & *altitudine eC*. Nam hemiſphaerium aequatur cono ejusdem baſis, & altitudine AC, & ſector ab A*d*C aequatur cono ſuper eadem baſi ad altitudinem A*e*, ergo reliquum ſolidum aequatur cono ejusdem baſis, & altitudine reliqua *e*C.

419. Hinc ſolidum a zona G*de*C circa AC rotata genitum aequatur cono, cujus altitudo *e*C, baſis vero aequalis circulo, cujus radii quadratum aequatur quadratis FA, & *de*. Nam ſectori concavo ſupra deſcripto, qui aequatur cono baſi radii AF, & altitudine *e*C additur conus a triangulo *de*C genitus, qui eandem habet altitudinem cum baſi radii *ed*.

420. Quoniam *deq* : AG*q*, ſive AF*q* = A*e*B : CAB nempe in ratione compoſita ex A*e* : AC, & *e*B : AB, aut hos dimidiando ex $\frac{eB}{2}$: AC, dimidiando nimirum A*e* in H,

cum.

cum ſit 2CH = AC + Ce = BC + Ce = eB, ut CH: CA, ductaque HP normali ad AC, & tangente FK, ut CA: CK, erit deq: AFq = Ae: CK, quare deq ⋈ CK = AFq ⋈ Ae = ſectori ab AdC genito, & ablato cono ex triangulo edC, remanebit ſegmentum ab Ade genitum aequale cono ſub baſi radii ed, & altitudine eK = cono ex triangulo Kde.

411. Hinc ſolidum ex trilineo concavo KoA aequatur anulo ex ſegmento dPo circa eundem axem rotato.

PROPOSITIO CLXII.

412. Si fiat ut DK: VD = CV: CE, ducta per punctum K recta AKB normali ad axem VD, & junctis AE, BE, facta rotatione ſpatiorum circa KE, erit ſectio ſphaerica AUB aequalis cono AEB (*fig.* 98., 99.)

Quoniam enim CV: CE = DK: UD = DKq: DBq = BKq: UBq, erit CV ⋈ UBq = CE ⋈ BKq. Sed CE = KE ∓ CK, ergo CV ⋈ VBq = KEq ⋈ KBq ∓ CK ⋈ KBq, adeoque CV ⋈ VBq ± CK ⋈ KBq = KE ⋈ KBq, ſcilicet ſector CBVA minus in prima figura, & plus in ſecunda cono ACB, quod erit ſectio ſphaerica AVB, aequalis cono AEB.

COROLLARIA.

413. Hinc ſolidum ex EVF circa EV rotatum aequatur ſolido circulari ex BF circa VD revoluto, ut ſolidum ex rotato EBV aequatur ſolido anulari ex rotatione VFB, quibus eſt commune triangulum mixtilineum VFB.

414. Si ad alteram partem fiat CH: CE = DK: VK, erit quoque conus ex triangulo HKB circa KH revoluto aequalis ſectioni ſphaericae reliquae ADB, unde duo illi

coni

coni ex EBH circa EH aequantur integrae ſphaerae UBDAU. Nam cum ſit UD: DK = CE: CV, & VK: VD = CV: CH, ideo provenit VK: DK = CE: CH, quae eſt etiam adducta CH: CE = DK: VK, ideo & conus ABH aequatur ſectioni ABD, & EBH revolutus per axem EH efficit duos conos toti ſphaerae AVBD aequales.

425. Si punctum K ſit in centro C patet fore hemiſphaerium AVB (*fig.* 100.) aequale cono ex rectangulo ABE, cujus axis CE duplus eſt radii CV, ſive aequalis diametro VD. Nam DK: VD = DC: VD = 1: 2 = CV: CE, ergo CE = 2CV.

426. Hinc hemiſphaerium duplum eſt coni AVB eidem interpoſiti cum axe aequali radio CV, & baſi circulo diametri AB, ut conus AEB duplus eſt ejusdem coni AVB, & tota ſphaera eſt quadrupla ejusdem coni AVB.

427. Unde colligitur hemiſphaerium eſſe duas tertias cylindri circumſcripti, nempe cylindrum ad hemiſphaerium eſſe ut 3: 2. Eſt enim cylindrus circumſcriptus hemiſphaerio ad conum huic inſcriptum ut 6: 2, conus vero ad hemiſphaerium ut 3: 6, ergo ex aequo perturbato cylindrus ad hemiſphaerium, vel cylindrus ſphaerae integrae circumſcriptus ad ſphaeram ut 3: 2.

428. Sphaera aequatur producto circuli maximi per duas tertias diametri. Nam cylindrus aequatur producto ſuae baſis in altitudinem, ergo hemiſphaerium, quod aequatur duabus tertiis cylindri eandem baſim & altitudinem habentis aequabitur uni ex circulis maximis in duas tertias altitudinis, ſive radii, adeoque ſphaera, quae dupla eſt hemiſphaerii, aequatur producto ex circulo maximo in quatuor tertias radii. Quid quod alia etiam ratione ſphaerae ſoliditas invenitur. Concipiatur ſphaerae ſuperficies in partes ita exiles diviſa ut ad ſuperficiem planam infinite accedant, & ex quolibet puncto perimetri earundem ducantur

rectae

rectae ad centrum ſphaerae, patet totidem pyramides haberi, quarum baſes erunt minimae particulae ſuperficiei ſphaericae, earum vero communis altitudo erit ſphaerae radius, quare eorundem aggregatum aequale erit pyramidi vel cono baſim habenti aequalem toti illi ſuperficiei ſphaericae, & eandem altitudinem. Sed ſphaerae ſuperficies quadrupla eſt circuli ejusdem ſphaerae maximi, conus vero eſt pars tertia producti ex baſi in altitudinem, erit ergo ſphaerae ſoliditas aequalis tertiae parti producti ex quadruplo circuli maximi, & radii, vel aequalis tertiae parti producti ex diametro in eundem circulum, ſcilicet duabus tertiis producti ex circulo illo in diametrum.

429. Sphaerarum ratio eſt triplicata rationis diametrorum earundem ſphaerarum; quippe proportione reſpondent cylindris circumſcriptis, qui cum ſint inter ſe ſimiles, ſunt in ratione triplicata diametrorum; Idem etiam patet ex ſphaerarum ſimilitudine. Cum enim ſphaerarum ſoliditates per circuli maximi ſuperficiem determinentur, circuli vero ſint figurae ſimiles, patet ſphaeras eſſe ſolida ſimilia, ac proinde in ratione triplicata diametrorum. Idem etiam ſic oſtenditur. Sphaerarum ſoliditates ſunt inter ſe ut circuli maximi ſuperficies in radium ducta; ſed circulorum ſuperficies ſunt in ratione duplicata ſemidiametrorum, ergo ſphaerae ſunt in ratione triplicata ſemidiametrorum, vel diametrorum.

PROPOSITIO CLXIII.

430. Si ſector CBD rotetur circa axem AC, generabit ſolidum DCHEB aequale duabus tertiis cylindri EKLB eandem altitudinem habentis (*fig.* 101.)

Superficies ſphaerica ſectoris CHAD ad totam ſuperficiem hemiſphaericam eſt ut AM: AC, proindeque ſolidum illud

illud eſt ad hemiſphaerium, ut ſuperficies ſphaerica illi congruens ad totam ſuperficiem hemiſphaericam, videlicet ut altitudo MC ad altitudinem radii AC, ergo eſt ut cylindrus EKLB ad cylindrum EFGB hemiſphaerio circumſcriptum. Sed hemiſphaerium aequatur duabus tertiis cylindri EFGB, ergo & ſolidum DCHEB aequatur duabus tertiis cylindri EKLB.

PROPOSITIO CLXIV.

431. Conus aequilaterus ad inſcriptam ſibi ſphaeram eam rationem habet quam 9: 4. (*fig.* 93.)

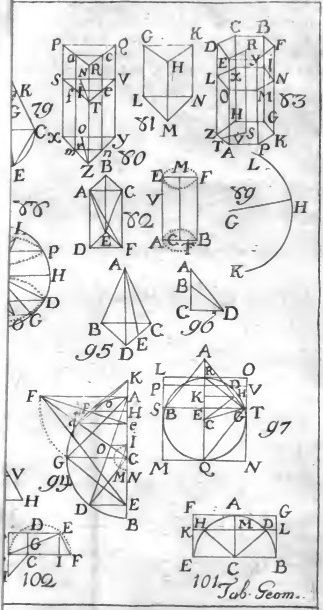
Conus LAM ad conum SAQ rationem habet compoſitam ex NA: AC, ſcilicet 3: 2, & circulo NL: CS, ſive 3: 4, ſcilicet ex 9: 6, & 6: 8, eſt igitur ad ipſum ut 9: 8, & conus ASQ ad ſphaeram ſui quadrupiam eſt ut 8: 32, ergo conus LAM ad ſphaeram LAMB eſt ut 9: 32. Sed ſphaera LAMB eſt ad ſphaeram NPR ut 32: 4, ergo conus BAE ad inſcriptam ſphaeram eſt ut 9: 4.

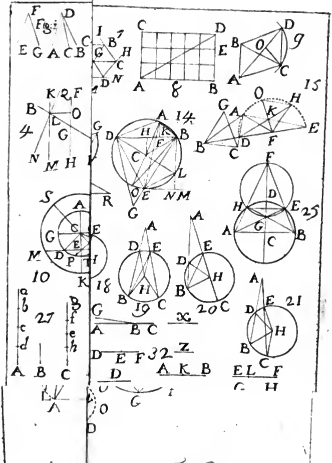
COROLLARIUM.

432. Cum itaque conus aequilaterus ſphaerae circumſcriptus ſit ad ſphaeram ut 9: 4, ſphaera vero ſit ad cylindrum circumſcriptum ut 2: 3, vel 4: 6, erit ergo idem conus ad cylindrum ut 9: 6, unde conus, cylindrus, ſphaera ſunt inter ſe ut numeri 9, 6, 4, ſcilicet rationem ſeſquialteram continuant, ut hinc proinde conſtet erraſſe D. *Stone*, qui in praefatione ad calculum integralem ait cylindrum, ſphaeram, & conum eſſe in ratione numerorum 3, 2, 1.

FINIS.

A01 1462249


79
80
81
83
88
82
89
95
96
97
99
101
102
Tab. Geom.



Tab. Geometr.

Digitized by Google

34. G. 41

Digitized by Google